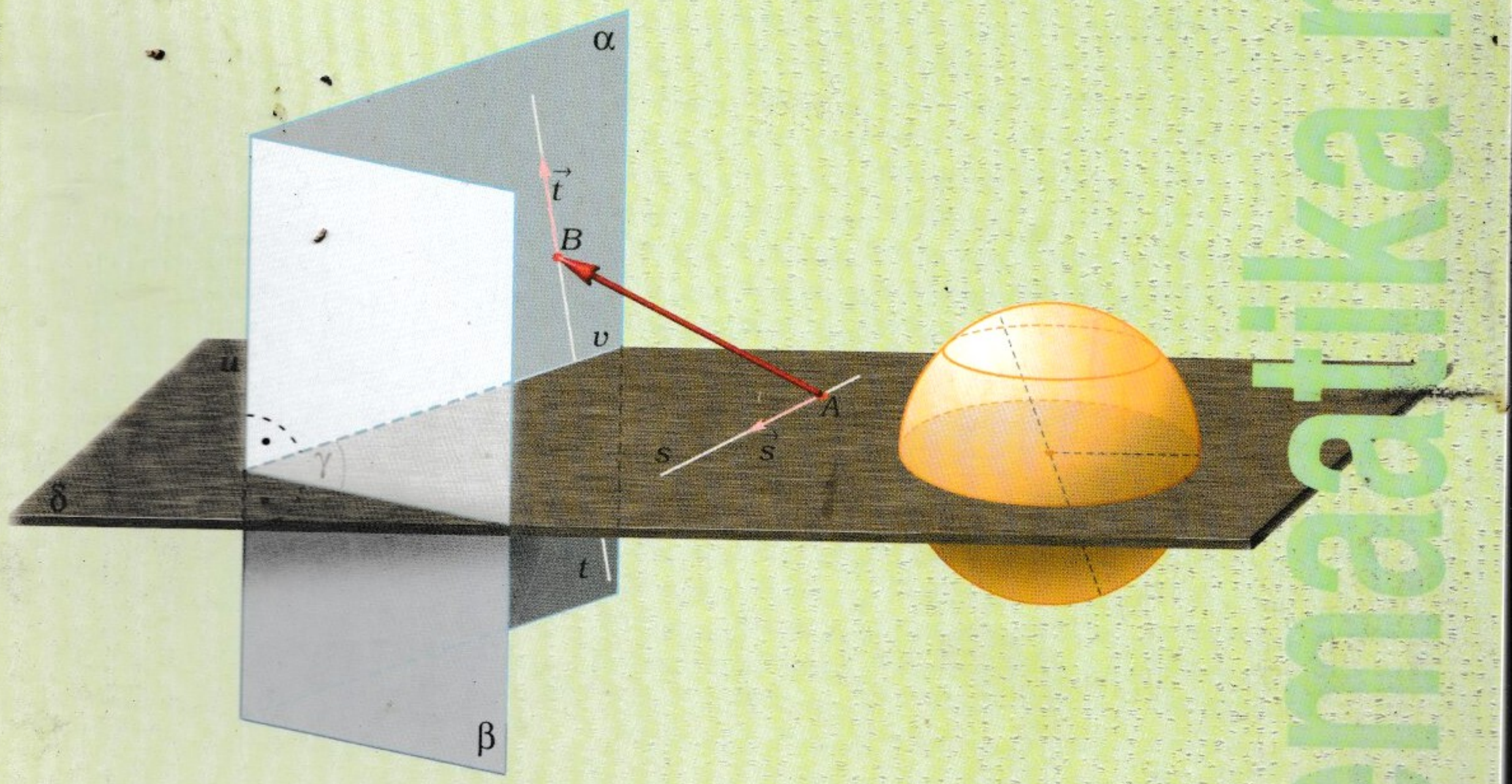
Anu Oks Heldena Taperson

MATEMAATIKA LISAMATERJAL 12



Anu Oks Heldena Taperson

MATEMAATIKA

LISAMATERJAL

12. klassile

[UUS ÕPPEKAVA]

AVITA

Sissejuhatus

Käesolev lisamaterjal on kolmas osa matemaatika tööraamatute sarjast gümnaasiumiõpilastele. Selle eesmärk on olla abiks matemaatika omandamisel. Siin on koos nii raudvara, näidisülesanded kui ka harjutamiseks lünk- ja kordamisülesanded. Seega on hoolsa õpilase täidetud tööraamat teatavas mõttes käsiraamat, mis jääb edaspidiseks kasutamiseks ka siis, kui õpikud on raamatukokku tagastatud.

Õppevahend on koostatud silmas pidades eeskätt laia matemaatika haru, kuid sobib kasutada ka kitsa matemaatika haru järgi õppivatele õpilastele. Tööraamatute koostamisel on jälgitud pigem matemaatika ainekava kui mõnda konkreetset õpikut.

Tööraamat sisaldab teoreetilist materjali: tähtsamaid definitsioone, valemeid, eeskirju, seoseid; harjutusi ja ülesandeid nii uue materjali omandamiseks kui ka õpitu kinnistamiseks ja kordamiseks; tööjuhendeid, graafikuid, skeeme.

Teema alguses on põhimõisted ja valemid, milleta ei saa ainet omandada. Edasi järgnevad näidisülesanded lünktekstina. Kuna väga paljusid matemaatikaülesandeid saab lahendada erineval meetodil, siis ei maksa kellelgi ennast segada lasta tööraamatus pakutud lahenduskäigust. Ülesannete valikul on lähtutud põhimõttest, et need sobiksid praegu kasutusel olevate matemaatikaõpikutega.

Iga teema lõpus on ka komplekt harjutusülesandeid koos vastustega. Neid oleks mõistlik lahendada ülesannete vihikusse enne kontrolltööd. Samuti leiab sealt eelmiste aastate riigieksamite (*RE*) samateemalisi ülesandeid.

Tööraamatu lõpus on harjutusülesanded, mida võib lahendada ka koduse proovieksamina.

Tööraamat on omal kohal uue materjali õppimisel õpetaja juhendamisel, uue materjali iseseisval õppimisel, õpitud teadmiste süvendamisel ja kinnistamisel, tagasiside saamiseks materjali omandamise kohta, rühmatöös, kordamisel (peatüki, kogu aasta materjali kordamisel, eksamiks kordamisel). Kindlasti leiab iga õpetaja tööraamatu rakendamiseks veelgi võimalusi.

Tööraamatu autorid

Oleme tänulikud Tallinna Prantsuse Lütseumi ja Tallinna Inglise Kolledži õpilastele ning retsensentidele sisukate parandus- ja täiendusettepanekute eest.

Anu Oks, Heldena Taperson
Matemaatika lisamaterjal 12. klassile

Retsenseerinud Aleksander Monakov, Anne Küüsmaa, Tiiu Kaljas (teemad 1–11, 13–21)

Toimetanud Esta Erit
Keeletoimetajad Kaire Luide, Annika Vesi

Kujundanud Terje Hütt

Fotod
Heidi Taperson: lk 37, 47, 60; Anu Oks: lk 10, 61, 78

ISBN 978-9985-2-2158-7
Autoriõigus: Avita kirjastus, 2013, 2015
Tallinn, 2015

ESINDUSED
Tallinn: Pikk 68, 10133, telefon 627 5401, faks 641 1340
Tartu: Vallikraavi 7/9, 51003, telefon/faks 742 7156
Pärnu: Kuninga 18, 80011, telefon/faks 444 2278
Jõhvi: Rakvere 30, 41532, telefon/faks 337 0108

http://www.avita.ee e-mail: info@avita.ee

Kõik õigused käesolevale väljaandele on seadusega kaitstud. Ilma autoriõiguse omaniku kirjaliku loata pole lubatud ühtki selle väljaande osa paljundada ei mehaanilisel, elektroonilisel ega muul viisil.

1. KORDAMINE

Täida lüngad.

Tea ja tunne valemeid!

1. Korrutamise abivalemid

a) $(a+b)(a-b) =$ . . . . . .

b) $(a+b)^2 =$ . . . . . .

c) $(a-b)^2 =$ . . . . . .

d) $(a+b)^3 =$ . . . . . .

e) $(a-b)^3 =$ . . . . . .

f) $(a+b)(a^2-ab+b^2) =$ . . . . . .

g) $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ . . . . . .

2. Astmed

a) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\ldots\ldots \text{ tegurit}}$, kui $n \in$ . . . . . .

b) korrutise aste $(ab)^n =$ . . . . . .

c) jagatise aste $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ . . . . . .

d) võrdsete alustega astmete korrutis $a^n \cdot a^m =$ . . . . . .

e) võrdsete alustega astmete jagatis $a^n : a^m =$ . . . . . .

f) astme aste $\left(a^n\right)^m =$ . . . . . .

g) negatiivne astendaja $a^{-k} =$ . . . . . ., kui a . . . . 0 ja $k \in$ . . . . . .

h) murruline astendaja $a^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots, \text{kui } a \ldots . 0, m \in \mathbf{Z}, n \in \{2; 3; 4; \ldots\} \\ 0, \text{kui } a \ldots . 0, m \in \{1; 2; 3; \ldots\}, n \in \{1; 2; 3; \ldots\} \end{cases}$

i) $(-a)^{2n} =$ . . . . a^{2n}, kui $a > 0$, $n \in \mathbf{Z}$

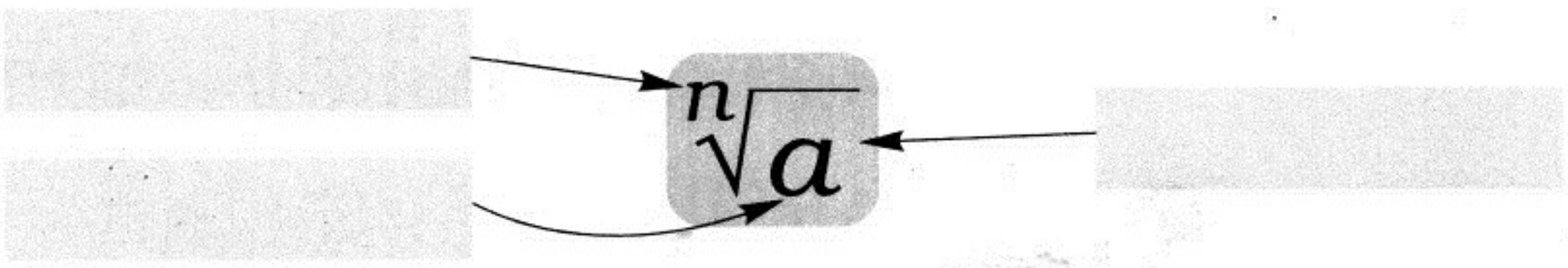
j) $(-a)^{2n+1} =$ . . . . a^{2n+1}, kui $a > 0$, $n \in \mathbf{Z}$

k) $a^0 =$ . . . . , kui a . . . . 0. NB! $0^n = 0$, kui n 0

l) 0^0 . . . . . .

3. Juured

a)



b) $\sqrt[2n+1]{a} = b$, kui $b^{2n+1} = \dots\dots\dots$, $n \in \{1; 2; 3; \dots\}$

c) $\sqrt[2n]{a} = \dots\dots\dots$, kui $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$, $a \dots\dots 0$, $b \dots\dots 0$,

$n \in \{\dots\dots\dots\dots\}$

d) korrutise juur $\sqrt[n]{ab} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

kui $a \dots\dots 0$, $b \dots\dots 0$, $n \in \{2; 3; \dots\}$

e) jagatise juur $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

kui $a \dots\dots 0$, $b \dots\dots 0$, $n \in \{\dots\dots\dots\dots\}$

f) juure aste $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, kui $n \in \dots\dots\dots$, $m \in \dots\dots$

g) juure juur $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, kui $n \in \dots\dots\dots$, $m \in \dots\dots$

4. Ruutvõrrand

a) taandamata ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalem $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\dots\dots\dots\dots}}{2 \cdot \dots\dots}$

b) taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendivalem $x_{1,2} = \dots\dots \pm \sqrt{\dots\dots\dots\dots}$

c) Viète'i valemid taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite kohta

$x_1 + x_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ja $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d) ruutkolmliikme lahutamine tegureiks $ax^2 + bx + c = a(x - \dots\dots)(\dots\dots\dots\dots)$, kus x_1

ja x_2 on $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. Determinandid

a) kaherealine determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots$

b) kolmerealine determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. Trigonomeetria

a) põhiseosed

$\sin^2 \alpha + \dots\dots\dots = 1$, $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\dots\dots}$, $\cot \alpha = \dfrac{\dots\dots}{\sin \alpha}$,

$1 + \tan^2 \alpha = \dots\dots\dots$, $\tan \alpha \cot \alpha = \dots\dots$, $1 + \cot^2 \alpha = \dots\dots\dots$

b) trigonomeetriliste funktsioonide täpsed väärtused

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
$\sin\alpha$						0		0
$\cos\alpha$					0			
$\tan\alpha$			1				puudub	
$\cot\alpha$	puudub							

c) täiendusnurga valemid $\sin(90° - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\tan(90° - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(90° - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\cot(90° - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin(-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\tan(-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\cot(-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e) taandamisvalemid

β	**90° ± α**	**180° ± α**	**270° ± α**	**360° ± α**
$\sin\beta$	$\cos\alpha$		$-\cos\alpha$	
$\cos\beta$				$\cos\alpha$
$\tan\beta$		$\pm\tan\alpha$		

f) summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin(\alpha \pm \beta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

g) kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$\sin 2\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos 2\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan 2\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

h) trigonomeetrilised põhivõrrandid ja nende lahendivalemid

$\sin x = m$ $x = (-1)^n \cdot \arcsin m + n\pi$, kus $n \ldots\ldots \mathbf{Z}$

$\cos x = m$ $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan x = m$ $x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Kolmnurk

a) siinusteoreem $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2R$

b) koosinusteoreem $a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$c^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) kolmnurga pindala valemid

1) aluse ja kõrguse kaudu $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) kõikide nurkade ja külje kaudu $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) kõikide külgede kaudu (Heroni valem) $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5) siseringjoone raadiuse kaudu $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6) ümberringjoone raadiuse kaudu $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8. Vektor tasandil

a) Kui on antud punktid $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid on

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Kahe punkti $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ vaheline kaugus

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

c) Vektori $\vec{u} = (a; b)$ pikkus $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

d) Vektorite $\vec{u} = (a; b)$ ja $\vec{v} = (c; d)$ summa ja vahe koordinaatides on

$\vec{u} \pm \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) Kui $\vec{u} \parallel \vec{v}$, siis $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) Kui $\vec{u} \perp \vec{v}$, siis $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) Vektori $\vec{u} = (a; b)$ korrutis arvuga k on $k \cdot \vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

h) Vektorite skalaarkorrutis $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha$, kus α on nurk vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vahel,

ehk koordinaatides $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

i) Nurk kahe vektori vahel $\cos\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

j) Nullvektori koordinaadid $\vec{0} = (\ldots.; \ldots.)$ ja pikkus $\left|\vec{0}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9. Joonesta kolmnurk külgedega 5 cm, 6 cm ja 7 cm ning konstrueeri sellele ümberringjoon. Mõõda ümberringjoone raadius. Kui suur on tekkinud ringi pindala? Mitu protsenti moodustab kolmnurga ümbermõõt tema ümberringjoone pikkusest?

Vastus. . . . . .

10. Sirge võrrandid tasandil

a) üldvõrrand . . . . . .

b) punktiga $A(x_1;\ y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{s} = (s_x;\ s_y)$ määratud sirge võrrand

. . . . . .

c) kahe punktiga $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ määratud sirge võrrand

. . . . . .

d) telglõikudes määratud sirge võrrand . . . . . .

e) punktiga $A(x_1;\ y_1)$ ja tõusuga k määratud sirge võrrand . . . . . .

f) tõusuga k ja algordinaadiga b määratud sirge võrrand . . . . . .

g) nurk sirgete $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ vahel

$$\tan\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{\ldots\ldots\ldots} \right|$$

11. On antud punktid $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

Lõigu *AB* keskpunkti *C* koordinaadid $C(\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots)$.

12. Ringjoone võrrand

$(x - \ldots.)^2 + (y - \ldots.)^2 = \ldots\ldots\ldots$, kui keskpunkt on $K(a;\ b)$ ja raadius r.

Kui ringjoone keskpunkt on $K(0;\ 0)$, siis ringjoone võrrand on

. . . . . .

13. Aritmeetiline jada

a) üldliige $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, kus d on $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) omadus $a_k = \dfrac{a_{k-1} + \ldots\ldots\ldots}{2}$

c) summa $S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

14. Geomeetriline jada

a) üldliige $a_n = \ldots\ldots\ldots$, kus q on $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) omadus $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot \ldots\ldots\ldots}$

c) summa $S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

15. Hääbuva geomeetrilise jada summa $S = \dfrac{a_1}{\ldots\ldots\ldots}$, kus $|q| < 1$

16. Liitprotsendiline kasvamine (kahanemine)

$L = A \cdot \left(1 \pm \ldots\ldots\ldots\right)^n$, kus L on lõppväärtus, A on $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, p on kasvamise protsent ja n on kasvutsüklite arv.

17. Logaritmid

a) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = \ldots\ldots$, kus $a \ldots\ldots 0$, $a \neq 1$, $b \ldots\ldots 0$

b) $a^{\log_a c} = \ldots\ldots\ldots$

c) $\log_a a = \ldots\ldots\ldots$

d) $\log_a 1 = \ldots\ldots\ldots$

e) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \ldots\ldots\ldots$, $b > 0$, $c \ldots\ldots 0$

f) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $b \ldots\ldots 0$, $c \ldots\ldots 0$

g) $\log_a b^n = \ldots\ldots\ldots \cdot \log_a b$, $b \ldots\ldots 0$

h) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{\log_a b}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

i) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\ldots\ldots\ldots}$

j) $\log_a b = \dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots}$

18. Paarisfunktsioon $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral

19. Paaritu funktsioon $f(-x) = \ldots\ldots\ldots$ iga $x \in X$ korral

20. **Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis**

a) $(u+v)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $(u-v)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $(c\cdot u)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

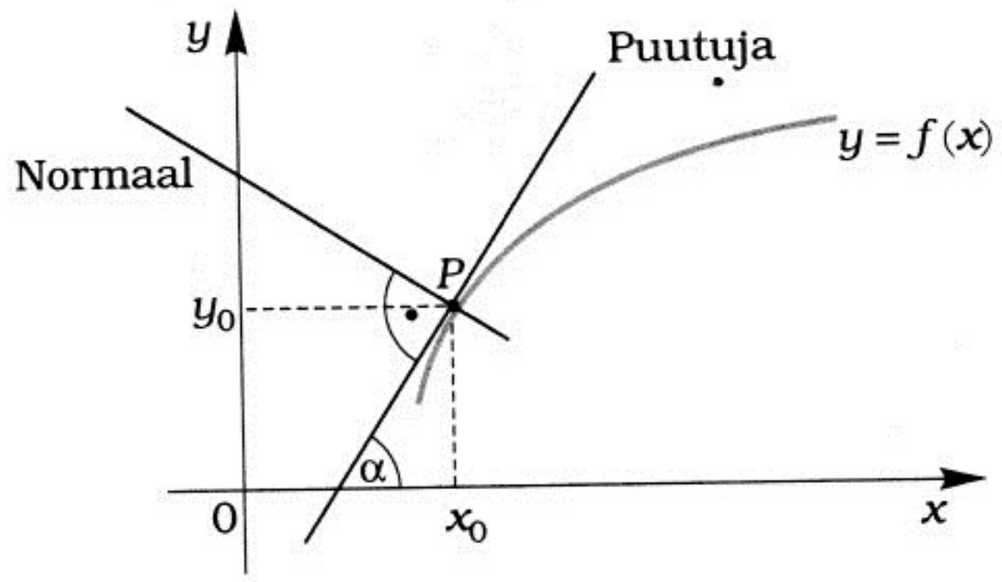
d) $(u\cdot v)' = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - \ldots\ldots\ldots}{v^2}$

21. **Liitfunktsiooni tuletis** $F'(x) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$, kui $F = f(u)$ ja $u = g(\ldots)$

22. **Puutuja võrrand** $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, kus puutuja tõus $k = \ldots\ldots\ldots$ ja puutepunkt on $P(\ldots;\ldots)$.

23. **Normaali võrrand** $y - y_0 = \ldots\ldots\ldots\cdot(x - x_0)$, kus puutuja normaali tõus on $\ldots\ldots\ldots$ ja normaal läbib punkti $P(\ldots;\ldots)$.



24. **Tuletiste tabel**

$c' =$	$\left(a^x\right)' =$
$x' =$	$(\ln x)' =$
$\left(\frac{1}{x}\right)' =$	$\left(\log_a x\right)' =$
$\left(\sqrt{x}\right)' =$	$(\sin x)' =$
$\left(x^n\right)' =$	$(\cos x)' =$
$\left(e^x\right)' =$	$(\tan x)' =$

HARJUTUSÜLESANDED

1. Lihtsusta avaldis $\dfrac{1-2x+x^2}{x-3}\cdot\left[\dfrac{(x+2)^2-x^2}{4x^2-4}+\dfrac{3}{x-x^2}\right]$ ja arvuta selle väärtus, kui $x=4^0-8:3^{-1}:9^{-0,5}$.
2. Lahenda võrrand $x^2-3x+q=0$ ja leia q väärtus, kui lahendite ruutude vahe on 39.
3. Lahenda võrrand $\dfrac{10^x}{\sqrt[3]{0{,}01^x\cdot 0{,}1^{x^2+3x}}}=1000$.
4. Lahenda võrratus $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6)>-2$.
5. Lahenda võrrand ja kontrolli lahendit.

$$\sin 2x+\sin x-2\cos x-1=0$$

6. Lahenda võrratus $2^{x^2}<2^{2x}$.
7. Leia joone $y=\dfrac{2}{x}$ puutuja võrrand punktis $(-2;\ -1)$. Leia puutuja tõusunurk.
8. Aritmeetilise jada kolmanda ja seitsmenda liikme summa on 6, korrutis aga 8. Leia selle jada 16 esimese liikme summa.
9. Leia kolm arvu, mis moodustavad geomeetrilise jada, kui esimese ja kolmanda liikme summa on 52 ja teise liikme ruut on 100.
10. Uuri funktsiooni $y=0{,}5x^4-4x^2$ ja skitseeri graafik.
11. Leia funktsiooni $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ määramispiirkond.
12. Leia funktsiooni $y=2\sin x+3$ positiivsuspiirkond.
13. Leia funktsiooni $y=-x^3+3x^2$ graafiku ekstreemumpunktid.
14. Olemasolevast materjalist saab Endel valmistada oma koerale Ronnile jooksuaediku, mida piirab 60 m pikkune tara. Taraga tuleb kolmest küljest piirata ristkülikukujuline maatükk nii, et selle pindala oleks suurim. Millised peaksid olema maatüki mõõtmed?

Vastused

1. $1\frac{1}{71}$
2. -40
3. -9 ja 1
4. $3<x<5$
5. $x_1=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\ \ x_2=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$
6. $]0;2[$*
7. $y=-0{,}5x-2;\ 153°26'$
8. 20 või 76
9. 2, 10, 50 või 2, −10, 50
10. $X=\mathbf{R};\ X^0=\{0;\pm 2\sqrt{2}\}$;
    $X^+=]-\infty;-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2};\infty[$;
    $X^-=]-2\sqrt{2};2\sqrt{2}[\setminus\{0\}$; $X_1\uparrow=]-2;0[$,
    $X_2\uparrow=]2;\infty[$; $X_1\downarrow=]-\infty;-2[$, $X_2\downarrow=]0;2[$;
    $E_{max}(0;0)$; $E_{min_1}(-2;-8)$; $E_{min_2}(2;-8)$
11. $X=]-\infty;-1]\cup]2;\infty[$
12. $X^+=\mathbf{R}$
13. $E_{min}(0;0)$; $E_{max}(2;4)$
14. 15 m ja 30 m

* Mõnes õpikus märgitakse vahemikku kujul $(a;\ b)$, poollõiku $(a;\ b]$ või $[a;\ b)$. Siin ja edaspidi kasutatakse ainult nurksulgudes tähistusi.

2. VEKTOR TASANDIL. KORDAMINE

Täida lüngad.

1. **Vektoriks nimetatakse** . . . . . **ja seda iseloomustavad**

   a) . . . . . ,

   b) . . . . . ,

   c) . . . . . .

2. Samasihilised ehk . . . . . vektorid asetsevad samal või . . . . . sirgetel.

3. Samasuunalisi vektoreid tähistame . . . . . ja vastassuunalisi . . . . . .

4. Kollineaarseid vektoreid tähistame sümboliga . . . .

5. Vektorit iseloomustavaks arvväärtuseks on tema . . : . . . . . .

6. Vektoreid võib tähistada algus- ja lõpp-punkti abil (näiteks . . . . . .) või väiketähega (näiteks . . . . . .). Kanna vastavad tähistused ka joonisele.

7. **Vektori koordinaate** arvutame valemi järgi $\overrightarrow{AB} =$ . . . . . ,

   kus vektori alguspunkt on $A(x_1; y_1)$ ja lõpp-punkt $B(x_2; y_2)$.

8. Kui vektor on antud koordinaatidega $\vec{a} = (x; y)$, siis tema **pikkus** $|\vec{a}| =$ . . . . . .

9. Leia vektori pikkus, kui vektori alguspunkt on $K(2; -5)$ ja lõpp-punkt $B(3; -8)$.

   . . . . . = ... (üh)

10. **Tehted vektoritega.**

    1. **Liitmine**

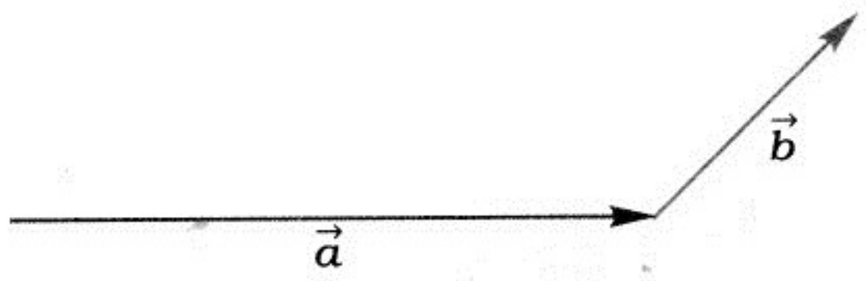
    a) Selleks, et liita kahte vektorit **kolmnurgareegli** järgi, tuleb vektorid paigutada nii, et

    . . . . . .

    . . . . . ja summaks on . . . . . .

    . . . . . .

    Kujuta vektorite summa joonisel.

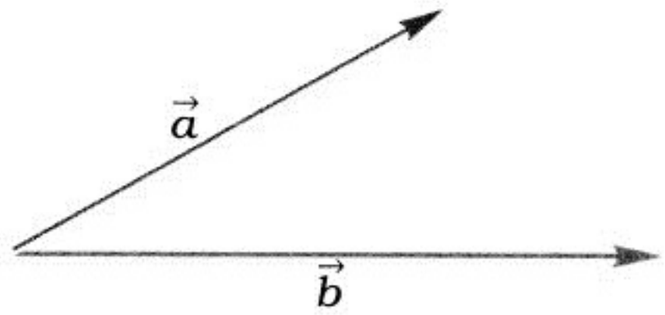


b) Selleks, et liita kahte vektorit **rööpkülikureegli** järgi, tuleb vektorid paigutada nii, e

. . . . . .

. . . . . .

Kujuta vektorite summa joonisel.

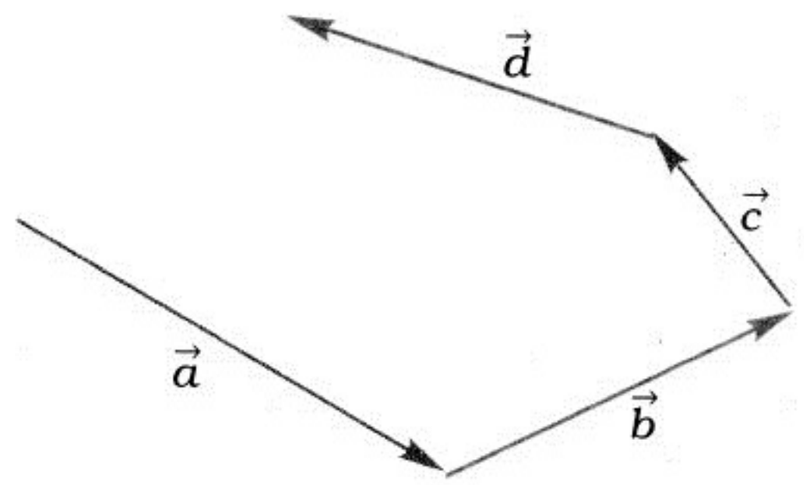


c) Selleks, et liita mitut vektorit **hulknurgareegli** järgi, tuleb vektorid paigutada nii, e

. . . . . .

. . . . . .

Kujuta vektorite summad joonisel.
$\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$



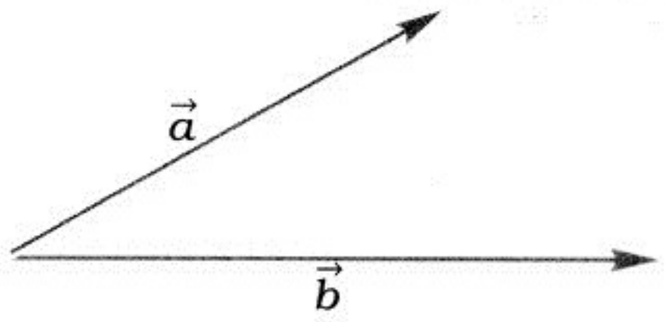
2. **Lahutamine**

Selleks, et lahutada ühest vektorist teine vektor, paigutame need vektorid nii, et nad lä

tuksid . . . . . Vektorite va

vektor lähtub . . . . . .

Kujuta vektorite vahe joonisel.



3. **Vektori $\vec{v}$ korrutamisel arvuga k** saame vektori, mis on pikkuselt võrdne . . . . . .

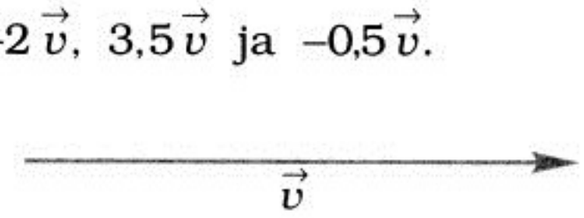
. . . . . ja . . . . . .

korrutisega ehk koordinaatides $k \cdot \vec{v} =$ . . . . . ., kui $\vec{v} = (x; y)$,

a) kui $k > 0$, siis vektor $k \cdot \vec{v}$ on . . . . . .

b) kui $k < 0$, siis vektor $k \cdot \vec{v}$ on . . . . . .

Kujuta joonisel vektorid $-2\vec{v}$, $3{,}5\vec{v}$ ja $-0{,}5\vec{v}$.



4. **Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutiseks** nimetatakse . . . . . .

. . . . . .

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ . . . . . .

Vektorite $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2)$ skalaarkorrutise leidmiseks koordinaatide abil tuleb . . . . . .

ehk $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ . . . . . .

a) Kui $\alpha = 0°$, siis . . . . . .

b) Kui $\alpha = 180°$, siis . . . . . .

c) Kui $\alpha = 90°$, siis . . . . . .

11. **Kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on risti** parajasti siis, kui . . . . . .

. . . . . .

ehk $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ . . . . . .

12. **Kaks vektorit $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2)$ on kollineaarsed**, kui kehtib seos

. . . . . , kus k on konstant, ehk koordinaatides

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = k$

13. **Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahelise nurga α koosinus** avaldub $\cos\alpha = \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots}$

HARJUTUSÜLESANDED

1. Kolmnurga tipud on $A(7; 6)$, $B(-3; 2)$ ja $C(1; -4)$. Lahenda kolmnurk.
2. Leia y nii, et vektorid $\vec{m} = (4; 3)$ ja $\vec{n} = (5; y)$ oleksid a) risti, b) kollineaarsed.
3. Nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, mille diagonaalide lõikepunkt on O. Leia $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$.
4. Punkt O on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ning $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Leia $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu $\overrightarrow{AO}$ ja $\overrightarrow{BO}$.
5. *RE 1997* (10 p). Antud on tasandi neli punkti $A(-6; -1)$, $B(-4; -4)$, $C(-1; -6)$ ja $D(-3; -3)$. Tõesta, et nelinurk $ABCD$ on romb, ja arvuta selle pindala.
6. *RE 2005* (15 p). On teada, et kolmnurga ABC tippe punktiga P ühendavad vektorid on $\overrightarrow{PA} = (8; 24)$, $\overrightarrow{PB} = (-4; 19)$, $\overrightarrow{PC} = (1; 7)$.
   1) Arvuta vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CA}$ koordinaadid ning kolmnurga ABC külgede pikkused.
   2) Tõesta, et tegemist on võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga.
   3) Leia vektor $\overrightarrow{BD}$ eeldusel, et punktid A, B, C ja D on ruudu tippudeks.

Vastused

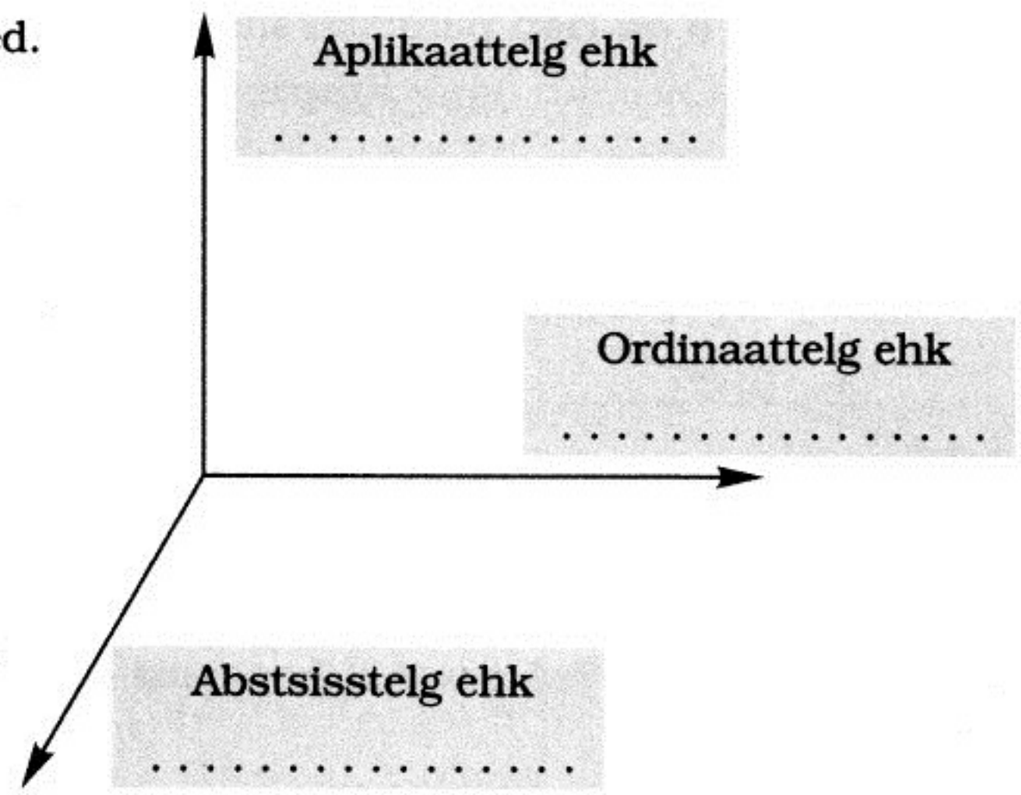
1. $AB = \sqrt{116}$ üh, $BC = \sqrt{52}$ üh, $AC = \sqrt{136}$ üh, $S \approx 38$ üh^2, $\alpha \approx 37°13'$, $\beta \approx 78°7'$, $\gamma \approx 64°40'$
2. $-6\frac{2}{3}$; $3\frac{3}{4}$
3. $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{BA}$
4. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
5. 5 üh^2
6. $\overrightarrow{AB} = (-12; -5)$, $|\overrightarrow{AB}| = 13$ üh; $\overrightarrow{BC} = (5; -12)$, $|\overrightarrow{BC}| = 13$ üh; $\overrightarrow{CA} = (7; 17)$, $|\overrightarrow{CA}| = 13\sqrt{2}$ üh, $\overrightarrow{BD} = (17; -7)$

3. PUNKTI KOORDINAADID RUUMIS

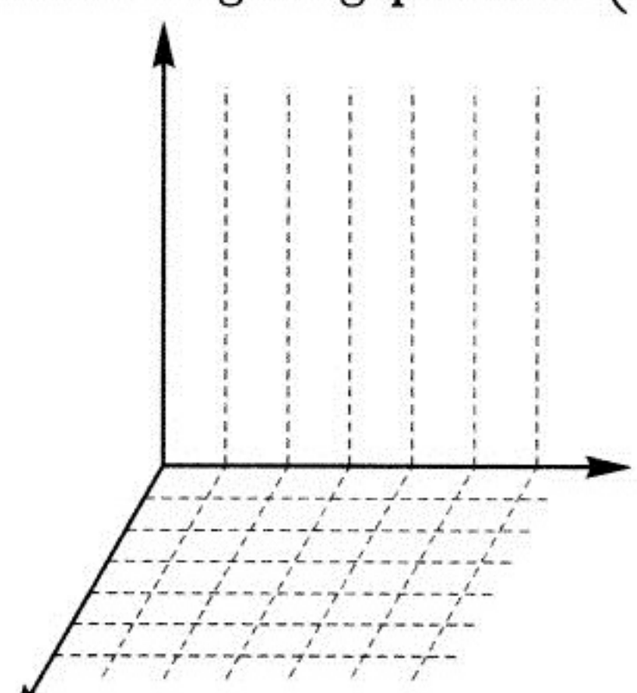
Täida lüngad.

1. Punkti asukoha määramiseks ruumis kasutame Clairaut' poolt 1731. a kasutusele võetud ristkoordinaadistikku. Punkti asukoha seal määrab järjestatud . . . . . .

2. Tee joonisele vajalikud täiendused.

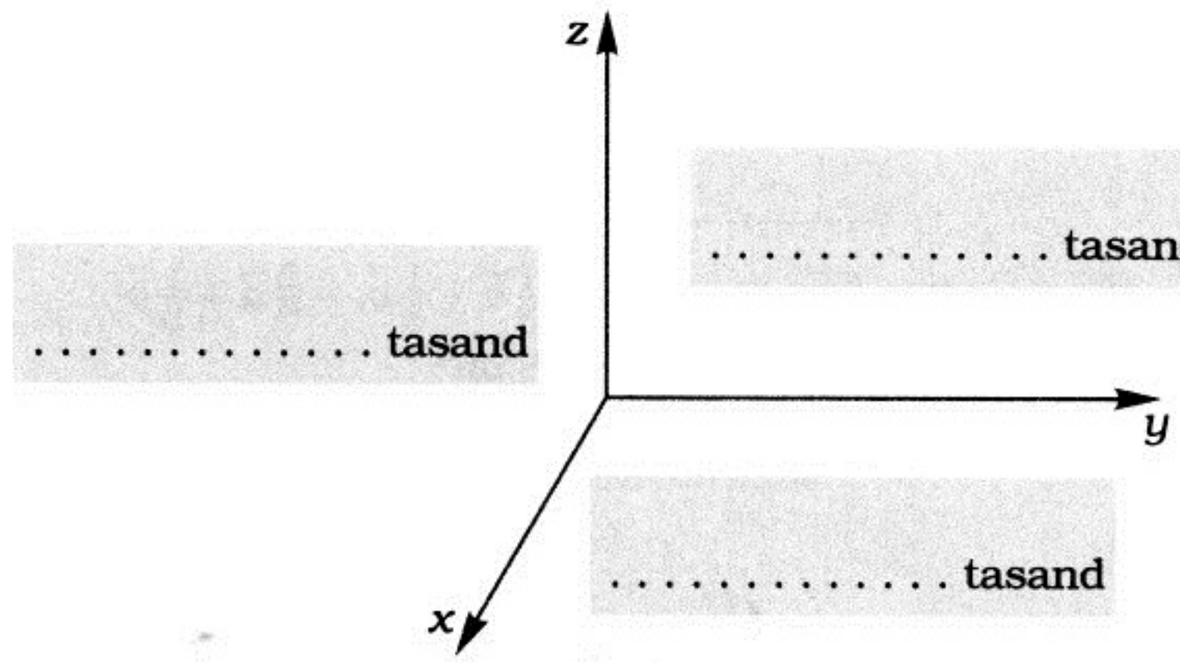


3. Tee joonisele vajalikud täiendused ning märgi punktid $A(2; 1; 3)$, $B(4; 2; 5)$, $C(2; 3; 4)$.



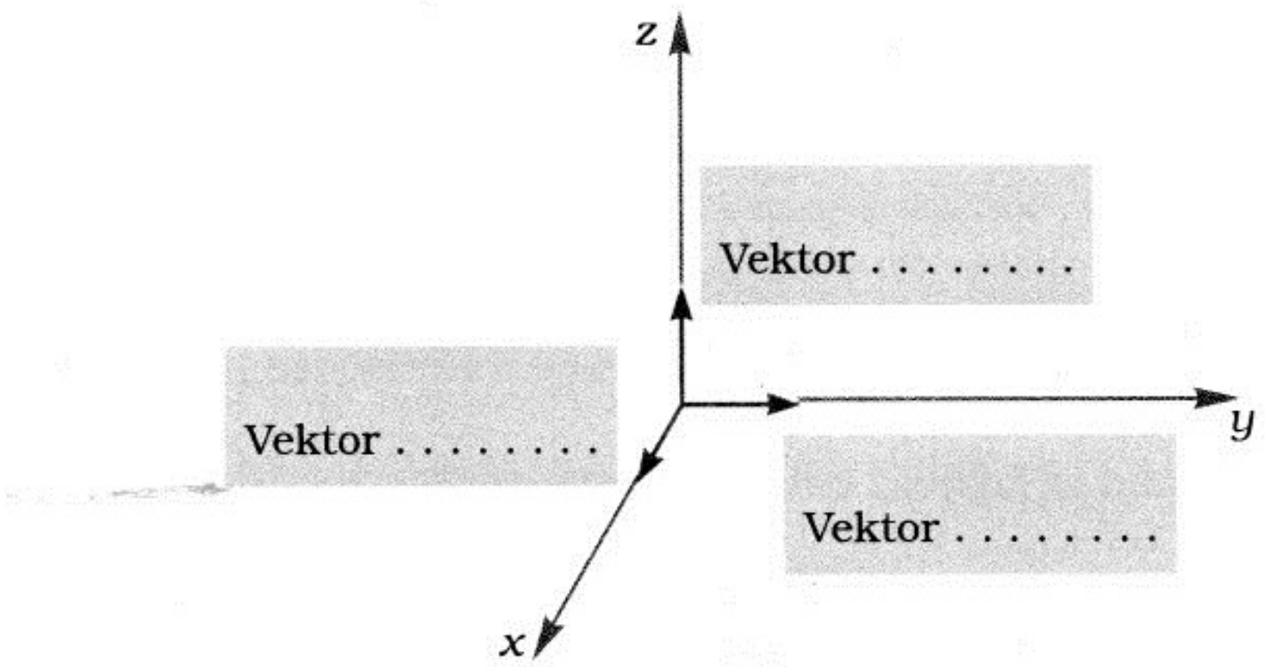
4. Punkt koordinaatidega $A(0; y; z)$ asub . . . . . tasandil, $B(x; 0; z)$ . . . . . ., $C(x; y; 0)$ . . . . . .

5. Täida lüngad.



6. Punkt koordinaatidega $A(0; 0; z)$ asub . . . . . .teljel, $B(x; 0; 0)$ . . . . . .,
$C(0; y; 0)$ . . . .

7. Vektorit pikkusega 1 nimetatakse . . . . . **Koordinaattelgedesuunalisi ühikvektoreid** tähistatakse . . . . . ning nad on omavahel paarikaupa . . . .



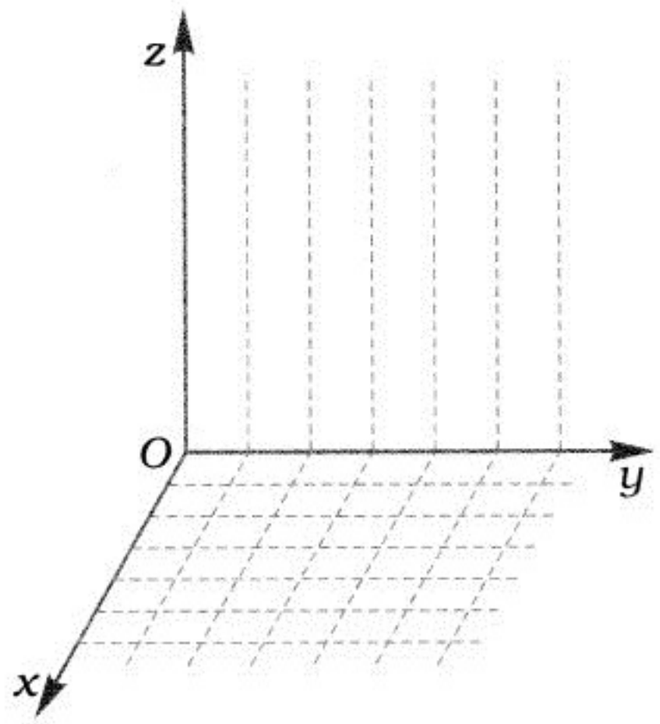
8. Vektorit $\overrightarrow{OA}$ nimetatakse punkti $A(x; y; z)$ . . . . . Punkti kohavektori koordinaadid võrduvad . . . . . ning avalduvad koordinaattelgedesuunaliste ühikvektorite abil . . . . . .

9. Tee joonisele vajalikud täiendused.
Avalda punkti $M(2; 4; 3)$ kohavektor ühikvektorite abil.

. . . . . .

. . . . . .

Kujuta joonisel vektor $\overrightarrow{OM}$.



4. VEKTORI KOORDINAADID RUUMIS

Täida lüngad.

1. **Vektori koordinaate ruumis** arvutame valemiga $\overrightarrow{AB} =$ . . . . . .

kus vektori alguspunkt on $A(x_1; y_1; z_1)$ ja lõpp-punkt $B(x_2; y_2; z_2)$, või koordinaattelgede suunaliste ühikvektorite kaudu . . . . . .

ja tema pikkus avaldub . . . . . .

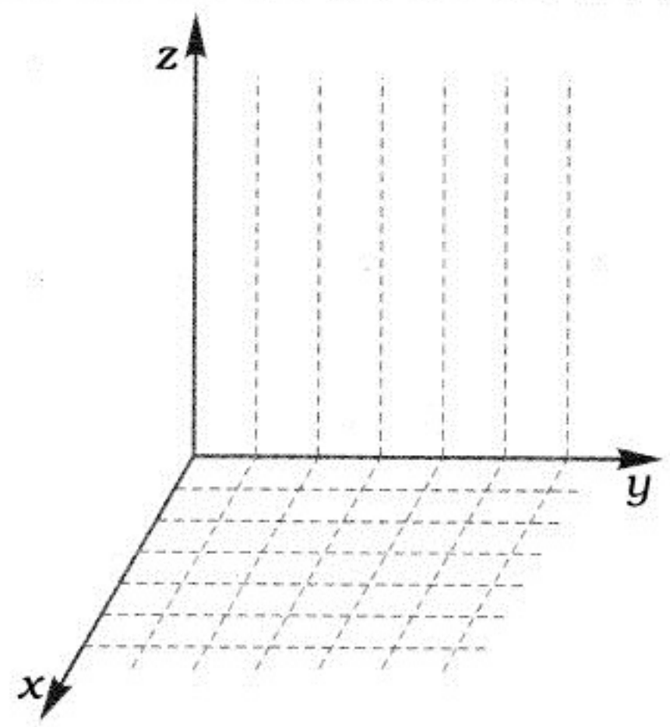
2. Kui vektor $\vec{a}$ on antud koordinaatidega $\vec{a} = (x; y; z)$, siis **vektori pikkus** $|\vec{a}| =$ . . . . . .

3. Leia

a) vektori koordinaadid ja pikkus, kui vektori alguspunkt on $A(2; -1; 4)$ ja lõpp-punkt $B(1; 3; 2)$

. . . . . .

Täienda joonist ning kujuta see vektor koordinaatteljestikus.



b) vektori alguspunkt, kui vektori lõpp-punkt $B(-2; 7; -3)$ ja $\overrightarrow{AB} = (4; -9; -1)$

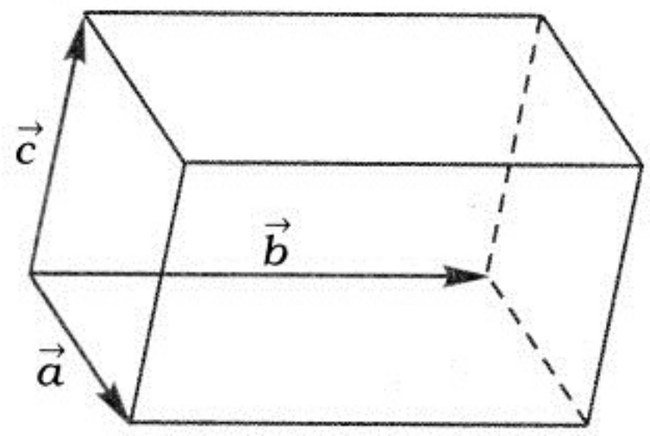
. . . . . .

c) vektori lõpp-punkt, kui vektori alguspunkt $A(-2; 4; 1)$ ja $\overrightarrow{AB} = (-3; 7; -3)$

. . . . . .

4. Kolme ruumivektori summa leidmiseks rakendame nad ühisesse alguspunkti ning ehitame nendele vektoritele . . . . . Summavektoriks on rööptahuka . . . .

5. Kujuta joonisel vektorite summad: $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{c}$; $\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



6. Kui $\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1)$ ja $\overrightarrow{BC} = (x_2; y_2; z_2)$, siis $\overrightarrow{AB} \pm \overrightarrow{BC} =$ . . . . . .

7. **Vastandvektoriteks** on vektorid, mille koordinaadid on teineteise. . . . . .

ning neid tähistatakse näiteks $\vec{a}$ ja . . . ., $\overrightarrow{AB}$ ja . . . .

8. Vektor ja tema vastandvektor on

a) . . . . . ;

b) . . . . . ;

c) . . . . . .

9. Vektori ja tema vastandvektori summa . . . . . = ... (nullvektor).

10. **Kaks vektorit $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, ja $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ on kollineaarsed**, kui kehtib seos

. . . . . ., kus k on konstant, ehk koordinaatides

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\text{. . . . . .}}{\text{. . . . . .}} = \frac{\text{. . . . . .}}{\text{. . . . . .}} = \frac{\text{. . . . . .}}{\text{. . . . . .}} =$. . . . . .

Kui $k > 0$, siis vektor $k \cdot \vec{a}$ on . . . . . .

Kui $k < 0$, siis vektor $k \cdot \vec{a}$ on . . . . . .

11. Nullvektor on kollineaarne . . . . . vektoriga ruumis ja tema suund . . . . . .

12. Leia arvude m ja n väärtused nii, et vektorid $\vec{a} = (8; m; -5)$ ja $\vec{b} = (n; 2; 4)$ oleksid kollineaarsed.

. . . . . .

13. Kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, mille kaudu on avaldatav iga vektor tasandil, on selle tasandi . . . . . .

14. Vektoreid, mis pärast ühisesse alguspunkti rakendamist asuvad ühel ja samal tasandil (või paralleelsetel tasanditel), nimetatakse. . . . . ehk **samarihilisteks**.

15. Komplanaarsed tasandid kuuluvad . . . . . **rihti**.

16. Kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustunud kolmerealine determinant võrdub . . . .

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \text{. . . . . .}$$

17. Ruumi iga vektorit saab avaldada . . . . . **vektorite kaudu.**

18. Kontrolli, kas punkt $P(-2; 10; 5)$ asub punktidega $A(2; -5; 0)$, $B(3; 4; 7)$ ja $C(4; -4; 3)$ määratud tasandil.

a) Leia vektorid

$\overrightarrow{PA} =$ . . . . . .

$\overrightarrow{PB} =$ . . . . . .

$\overrightarrow{PC} =$ . . . . . .

Veendu, et punktid A, B ja C ei asu samal sirgel.

b) Kontrolli, kas vektorid on samarihilised.

$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$ . . . . . .

Vastus. . . . . .

19. Leia parameetri p väärtused, mille korral vektorid $\vec{a} = (2; p; 3)$, $\vec{b} = (0; 5p; 19)$ ja $\vec{c} = (4p; 2; 6)$ oleksid komplanaarsed.

$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0$

Vastus.

20. Avalda vektor $\vec{m} = (3; 2; -1)$ vektorite $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; -1)$ ja $\vec{c} = (1; -1; -1)$ kaudu.

a) Kontrolli, kas vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on mittekomplanaarsed.

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$ . . . . . .

b) Leia s, t ja u nii, et $\vec{m} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} + u \cdot \vec{c}$, kus $s, t, u \in \mathbf{R}$. Nende arvude leidmiseks

moodusta võrrandisüsteem $\begin{cases} 1 \cdot s + 1 \cdot t + 1 \cdot u = 3 \\ 2 \cdot s \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 \cdot s \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Lahenda see Crameri valemite järgi. Selleks leia determinandid

$D_s = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D_t = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D_u = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$s = \frac{D_s}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots;\quad t = \frac{D_t}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots;\quad u = \frac{D_u}{D} = \ldots\ldots\ldots\ldots..$

Võrrandisüsteemi lahendiks on $\begin{cases} s = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Vastus. Vektor $\vec{m}$ avaldub vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu $\vec{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

21. Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse nende vektorite pikkuste ja vektoritevahelise nurga koosinuse korrutist, st $\vec{a} \cdot \vec{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kui $\alpha = 0°$, st samasuunaliste vektorite korral $\vec{a} \cdot \vec{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kui $\alpha = 180°$, st vastassuunaliste vektorite korral $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kui $\alpha = 90°$, st ristuvate vektorite korral $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

22. Vektori **skalaarruut** $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ ehk skalaarkorrutis iseendaga on võrdne vektori pikkuse ruuduga, st $\vec{a}^{\,2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

23. Kahe vektori $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ skalaarkorrutis võrdub nende vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summaga ehk $\vec{a} \cdot \vec{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

24. **Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahelise nurga koosinus** võrdub nende vektorite skalaarkorrutise ja pikkuste korrutise suhtega ehk $\cos\alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

HARJUTUSÜLESANDED

1. Arvuta vektoritele $\vec{a} = (1; 9; -4)$ ja $\vec{b} = (-2; 3; -6)$ ehitatud rööpküliku nurgad.
2. Näita, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 2\vec{k}$ on kollineaarsed.
3. Arvuta kolmnurga pindala, kui selle tipud on $A(0; 2; -3)$, $B(4; 4; 1)$ ja $C(-1; 0; -1)$.
4. Millise parameetri m väärtuse korral on vektor $3\vec{a} - m\vec{b}$ risti vektoriga $\vec{b} - \vec{a}$, kui $\vec{a} = (1; -2; 0)$ ja $\vec{b} = (2; 3; 1)$?
5. Kujuta koordinaatteljestikus punktid $A(2; 1; 3)$ ja $B(0; 2; 4)$. Leia nendevaheline kaugus ning avalda punktide kohavektorid ühikvektorite kaudu.
6. Olgu $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ korrapärane kuusnurkne prisma ja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$. Avalda nende vektorite kaudu vektorid $\overrightarrow{E_1C}$, $\overrightarrow{F_1A_1}$, $\overrightarrow{FC_1}$.
7. Kas punktid $K(1; 1; 5)$, $L(-3; 8; -6)$, $M(-2; 4; -1)$ ja $N(2; -3; 10)$ on rööpküliku tipud? Põhjenda.

Vastused

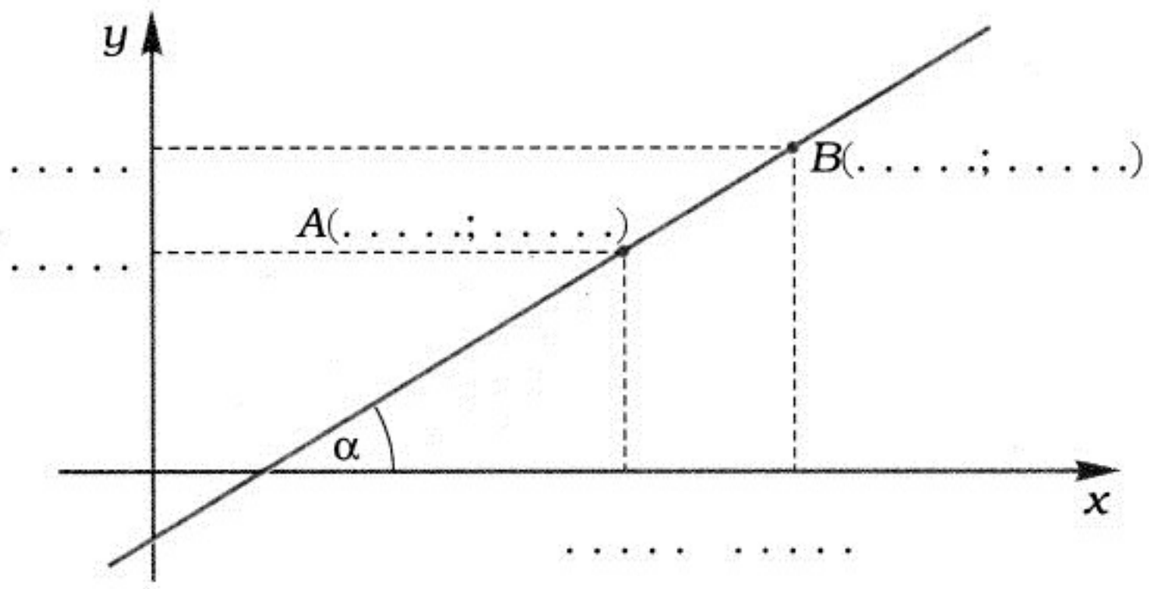
1. $45°; 135°$
3. 9 üh^2
4. $-1{,}5$
5. $\sqrt{6}$
6. $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $2\vec{a} + \vec{c}$

5. SIRGE VÕRRANDID TASANDIL KORDAMINE

Täida lüngad.

1. Sirge tõusuks nimetatakse selle sirge tõusunurga . . . . . ehk

$$k = \tan a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



2. Kui sirge on määratud

a) punktiga $A(x_1; y_1)$ ja tõusuga k, siis sirge võrrand avaldub kujul . . . . . .

b) tõusuga k ja algordinaadiga b, siis võrrand avaldub kujul . . . . . .

c) punktidega $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis võrrand avaldub kujul . . . . . .

d) punktidega $A(a; 0)$ ja $B(0; b)$, siis võrrand avaldub kujul . . . . . .

e) punktiga $A(x_1; y_1)$ ja sihivektoriga $\vec{s} = (s_x;\ s_y)$, siis võrrand avaldub kujul

. . . . . .

3. Võrrandit kujul $Ax + By + C = 0$ nimetatakse. . . . . , kus sirge üheks sihivektoriks on $\vec{s} = (. . . ;. . .)$ ning sirge normaalvektoriks $\vec{n} = (A; B)$.

4. Sirge sihivektor ja normaalvektor on teineteisega risti, st $\vec{s} \perp . . . .$

ja ristuvate vektorite korral skalaarkorrutis . . . . . $= 0$.

5. Kahe sirge $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ vaheliseks nurgaks nimetatakse nende sirgete lõikumisel tekkivat . . . . . .nurka. Kahe sirge vahelise nurga leiame sirgete normaalvektorite $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ ja $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ abil valemist $\cos\varphi = \dfrac{|. . . . . .|}{|. . . . . |\cdot|. . . . . |}$

või sirgete sihivektorite $\vec{s}_1 = (-B_1; A_1)$ ja $\vec{s}_2 = (-B_2; A_2)$ abil $\cos\varphi = \dfrac{. . . . . .}{. . . . . .}$.

6. Ristuvate sirgete korral $\varphi = 90°$ ja $\cos\varphi =$ . . . . . ., seega on täidetud tingimus

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 =$ . . . . . .

7. Paralleelsete sirgete korral nende normaalvektorid on . . . . . .
$\vec{n_1} = k \cdot \vec{n_2}$ ehk normaalvektorite vastavad koordinaadid on võrdelised.

$$\frac{\text{. . . . . .}}{\text{. . . . . .}} = \frac{\text{. . . . . .}}{\text{. . . . . .}} = k$$

8. Sirge läbib punkte $A(0; 8)$ ja $B(-1; 11)$. Kas punktid $G(1; 5)$ ja $L(3; 1)$ on sellel sirgel?

a) Koosta sirge AB võrrand. . . . . .

. . . . . .

b) Kontrolli, kas punkt G asub sirgel. . . . . .

c) Kontrolli, kas punkt L asub sirgel. . . . . .

9. Leia võrrand sirgele, mis läbib punkti $A(-4; 5)$ ning on paralleelne sirgega, mis läbib punkti $B(-2; 7)$ ning mille tõusunurk on $60°$.

a) Kuna paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed, siis leia paralleelse sirge tõus

$k =$ . . . . . .

b) Koosta sirge võrrand, kui sirge tõus $k = \sqrt{3}$ ja sirge läbib punkti A.

. . . . . .

10. Rööpküliku kolm tippu on $A(2; -3)$, $B(-4; -1)$ ja $C(-2; 4)$. Leia võrrand sirgele, mis läbib diagonaalide lõikepunkti ja on risti diagonaaliga AC.

a) Leia diagonaali AC võrrand. . . . . .

b) Leia sirge AC tõus $k_1 =$ . . . .

c) Kuna ristuvate sirgete korral tõusude korrutis $k_1 \cdot k_2 = -1$, siis otsitava sirge tõus

$k_2 =$ . . . .

d) Leia lõigu AC keskpunkt

O. . . . . .

e) Koosta otsitava sirge võrrand, mis läbib punkti $O(\ldots;\ldots)$

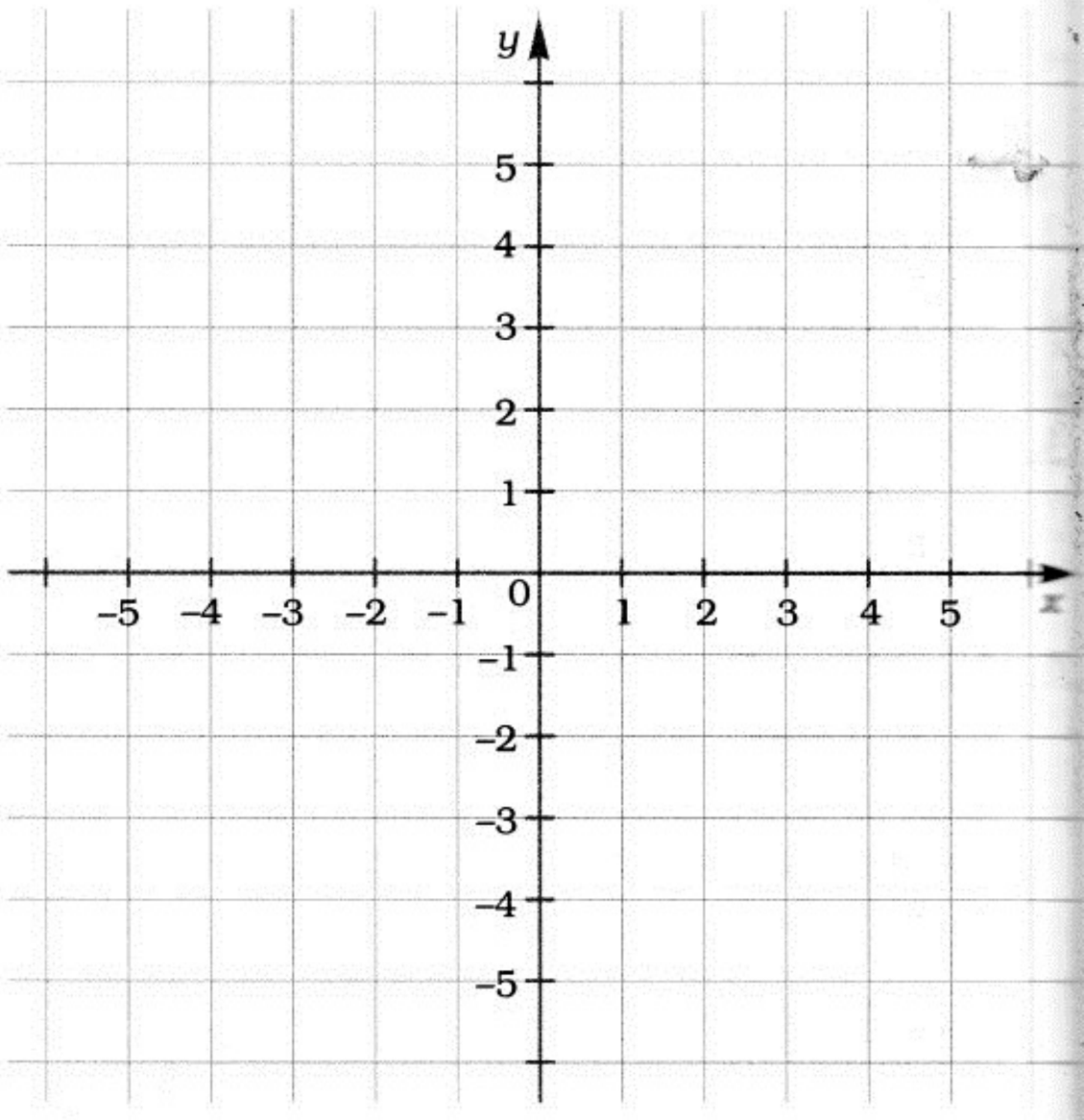
ja mille tõus

$k =$ . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Kontrolli lahendust joonise abil.

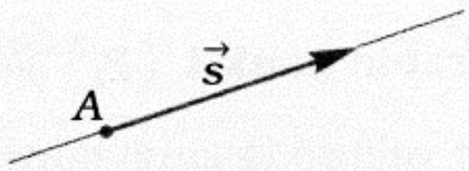


6. SIRGE VÕRRANDID RUUMIS

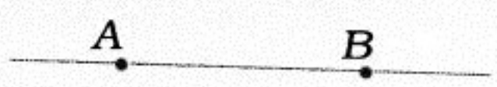
Täida lüngad.

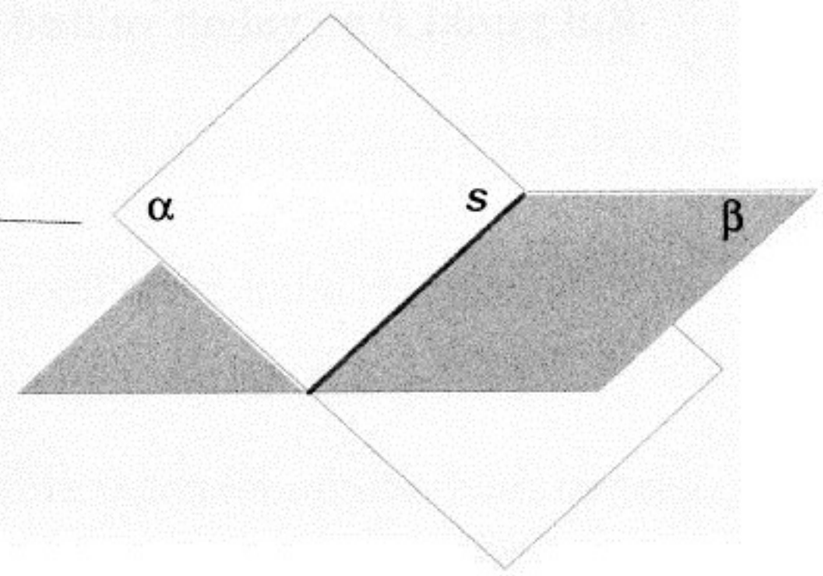
1. **Sirge ruumis** võib olla määratud

a) **ühe punkti ja** . . . . . **.vektoriga**;



b) . . . . . **punktiga**;



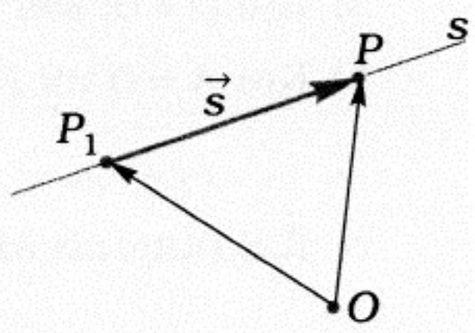


c) . . . . . **lõikuva tasandiga:** $\alpha \cap \beta = s$.

Olgu sirge s sihivektor $\vec{s} = (s_x;\ s_y;\ s_z)$ ja sirgel fikseeritud punkti P_1 kohavektor $\vec{p}_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$. Sirgel vabalt valitud punkti P kohavektor on $\vec{p} = (x; y; z)$.

2. **Sirge vektorvõrrand** on $\vec{p} = \vec{p_1} + t\vec{s}$, kus parameeter $t \in \mathbf{R}$.
Vektorvõrrand koordinaatides avaldub kujul

$$\begin{cases} x = x_1 + ts_x \\ y = \ldots\ldots\ldots, \text{ kus } t \in \mathbf{R}, \\ z = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



mida nimetatakse **sirge parameetrilisteks võrranditeks**.

3. Avaldades parameetri t, saame **sirge kanoonilised võrrandid**.

$$\frac{x - x_1}{s_x} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

4. Kui sirge on määratud kahe punktiga $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ja $P_2(x_2; y_2; z_2)$, siis sirge kanoonilised võrrandid on kujul $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

5. Koosta sirge kanoonilised võrrandid, kui sirge on määratud punktidega $A(-3;4;2)$ ja $B(5;-4;0)$. Esita saadud võrrandid parameetrilisel kujul.

a) $\frac{x-(-3)}{5-(-3)} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

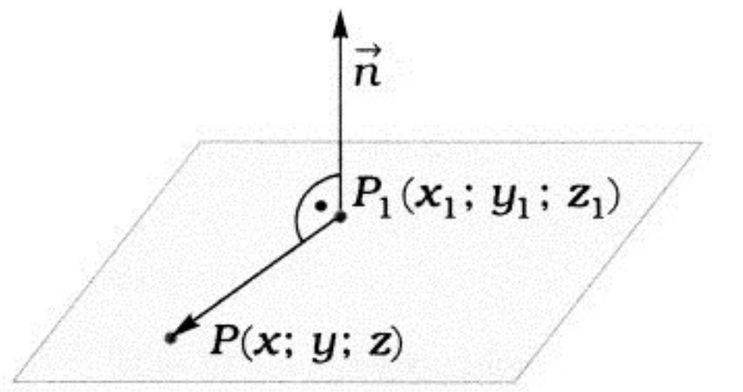
b) Parameetrilisel kujul:

7. TASANDI VÕRRANDID

Täida lüngad.

1. Tasand võib olla määratud **punkti** (P_1) ja . . . . . **vektoriga**

Kui punkt P on vabalt valitud tasandi punkt, siis $\overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{n} =$ . . . . . .



Kui tasand läbib punkti $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ja on risti tasandi normaalvektoriga $\vec{n} = (A; B; C)$, saame võrrandi $(x - x_1) \cdot A + (y - y_1) \cdot B + (z - z_1) \cdot C =$ . . . .

Siit saame tasandi üldvõrrandi . . . . . .

Erijuhud

a) Kui $D = 0$, siis tasand läbib . . . . . .

b) Kui $A = 0$ või $B = 0$ või $C = 0$, siis tasand on paralleelne . . . . . .

. . . . . .

c) Kui puudub üks normaalvektori koordinaatidest ja vabaliige on 0, siis tasand läbib

. . . . . .

d) Kui puuduvad kaks normaalvektori koordinaati, siis tasand on paralleelne . . . . . .

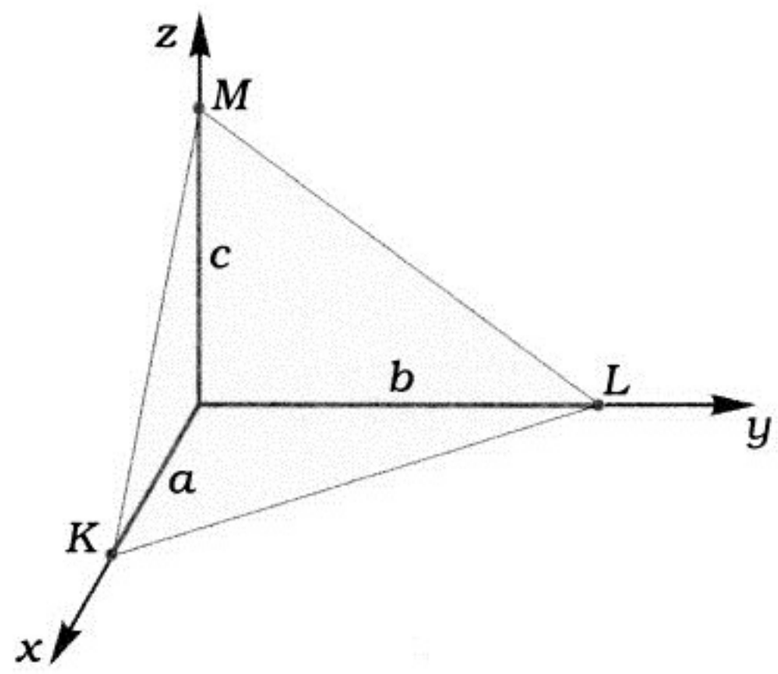
. . . . . .

e) Kui puuduvad kaks normaalvektori koordinaati ja vabaliige on 0, siis on tegemist

. . . . . .

2. Tasandi võrrand telglõikudes.

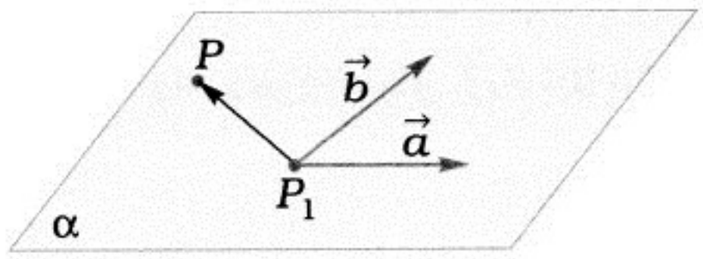
Kui tasand lõikab koordinaattelgi punktides $K(a; 0; 0)$, $L(0; b; 0)$ ja $M(0; 0; c)$, siis tasandi võrrandiks on $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} =$ . . . .



8. TASANDI VÕRRANDI ERINEVAD KUJUD

Täida lüngad.

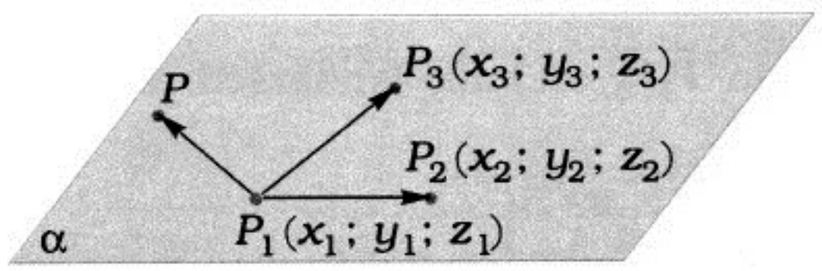
1. **Tasand on määratud . . . . . punkti ja kahe . . . . . vektoriga.**



Tasand α on määratud punktiga $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ning tasandil oleva kahe mittekollineaarse vektoriga $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ ja $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$. Võttes tasandil vabalt ühe punkti $P(x;\ y;\ z)$, saame tasandile kolmanda rihivektori $\overrightarrow{P_1P}$. Kuna tegemist on komplanaarsete vektoritega, siis

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. **Tasand on määratud . . . . . punktiga, mis ei asetse ühel sirgel.**



Leia vektorid. $\overrightarrow{P_1P} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

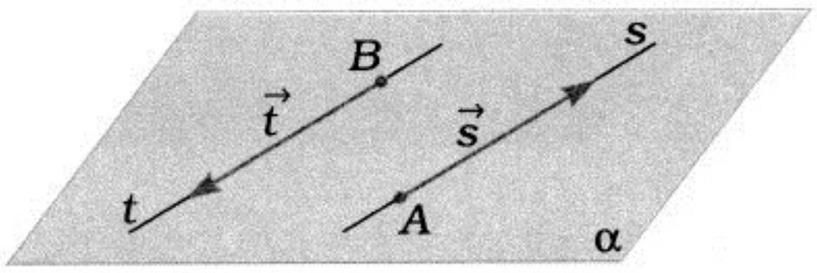
$\overrightarrow{P_1P_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

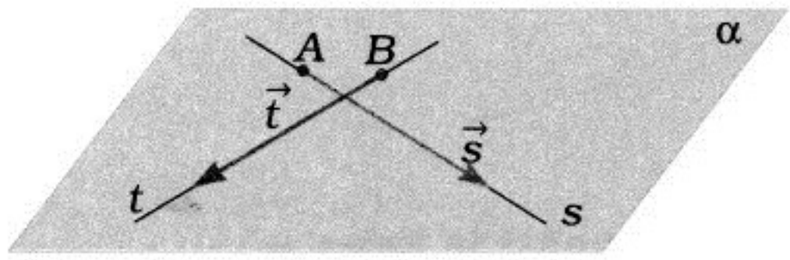
Kuna vektorid $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ ja $\overrightarrow{P_1P_3}$ on komplanaarsed, siis

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. **Tasand on määratud kahe . . . . . sirgega.**



4. Tasand on määratud . . . . . sirgega.



5. Tingimus, et neli punkti $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$, $P_3(x_3; y_3; z_3)$ ja $P_4(x_4; y_4; z_4)$ asetseksid samal tasandil:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Koosta tasandi võrrand, kui tasand on määratud punktidega $P_1(-2; 0; -5)$, $P_2(3; 4; 5)$ ja $P_3(4; -3; 2)$.

Olgu tasandi suvaline punkt $P(x; \ldots.; \ldots.)$.

Leia vektorid. $\overrightarrow{P_1P} = (x+2; y; z+5)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kuna vektorid $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ ja $\overrightarrow{P_1P_3}$ on komplanaarsed, siis

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z+5 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vastus.

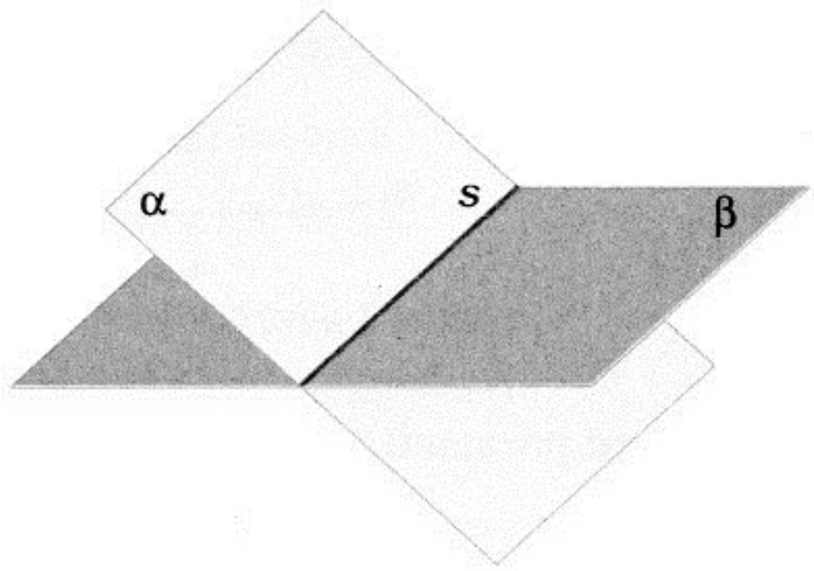
9. KAHE TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID

Täida lüngad.

1. Kaks tasandit . . . . . .

Kui kaks tasandit lõikuvad, siis nende tasandite lõikejooneks on . . . . . .

$$\alpha \cap \beta = s$$



Tasandid α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **lõikuvad** parajasti siis, kui nende normaalvektorid $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ja $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ on . . . . . .

. . . . . .

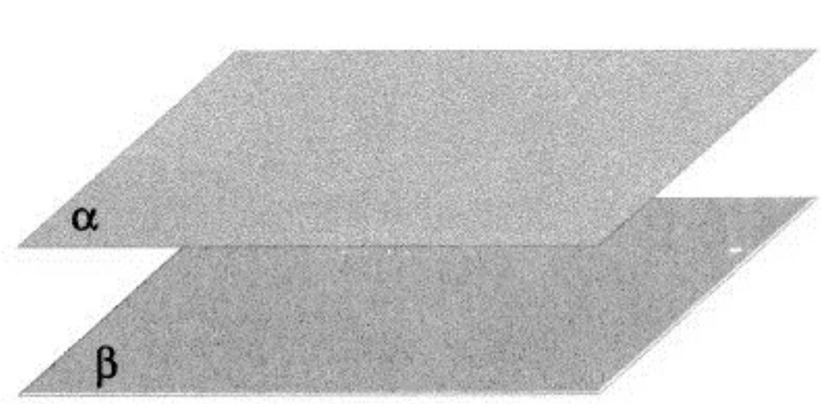
2. Kahe tasandi vahelise nurga leiame valemiga

$$\ldots\ldots = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3. Kaks tasandit on risti parajasti siis, kui $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \ldots\ldots\ldots$

4. Kaks tasandit on . . . . . .

Tasandid α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ on paralleelsed parajasti siis, kui $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.



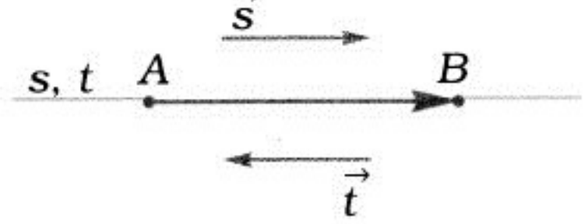
5. Kaks tasandit α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **ühtivad** parajasti siis, kui $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

10. KAHE SIRGE VASTASTIKUSED ASENDID

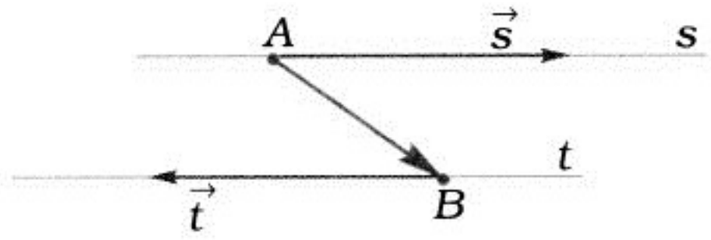
Täida lüngad.

Olgu sirge s määratud punktiga $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja sihivektoriga $\vec{s} = (s_x;\ s_y;\ s_z)$ ning sirge t punktiga $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ja sihivektoriga $\vec{t} = (t_x;\ t_y;\ t_z)$.

1. **Kaks sirget s ja t ühtivad** parajasti siis, kui $\overrightarrow{AB}$ on . . . . . sirge sihivektoritega $\vec{s}$ ja $\vec{t}$, st $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{s} \parallel \vec{t}$.

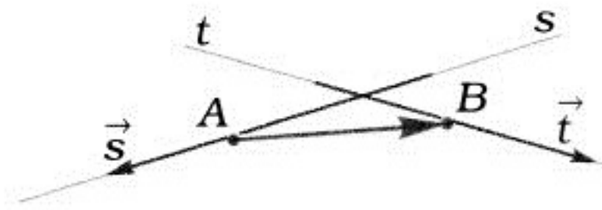


2. **Kaks sirget s ja t on paralleelsed** parajasti siis, kui sirgete sihivektorid on kollineaarsed, st $\vec{s} \parallel \vec{t}$, kuid $\overrightarrow{AB}$ . . . . . $\overrightarrow{AB} \nparallel \vec{s} \parallel \vec{t}$.



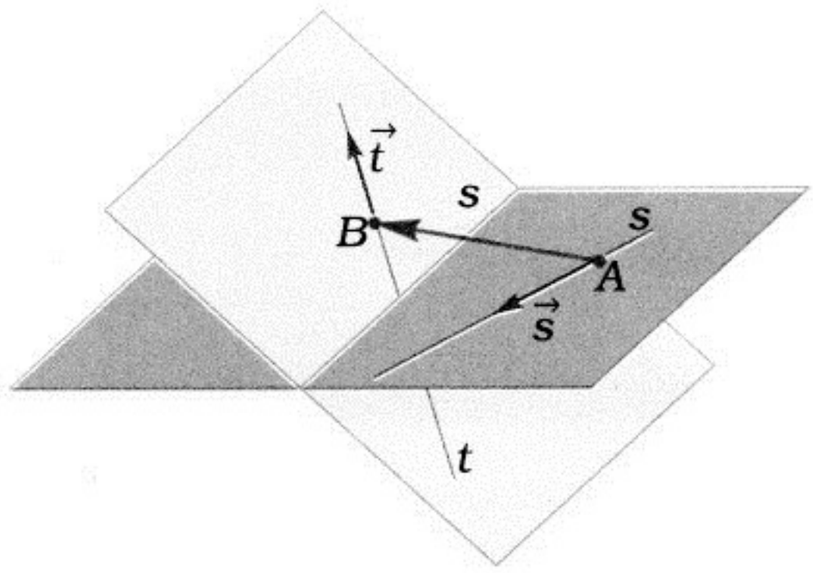
3. **Kaks sirget s ja t lõikuvad** parajasti siis, kui nende sihivektorid. . . . . ning vektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$ on komplanaarsed, st $\vec{s} \nparallel \vec{t}$ ning

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



4. **Sirged s ja t on kiivsirged** parajasti siis, kui nende sihivektorid . . . . . ja vektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\overrightarrow{AB}$ . . . . . komplanaarsed, st $\vec{s} \nparallel \vec{t}$ ning

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} \neq \ldots\ldots\ldots\ldots$$



5. **Kahe sirge vahelise nurga** leiame valemiga . . . . . $= \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{t}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{t}|}$.

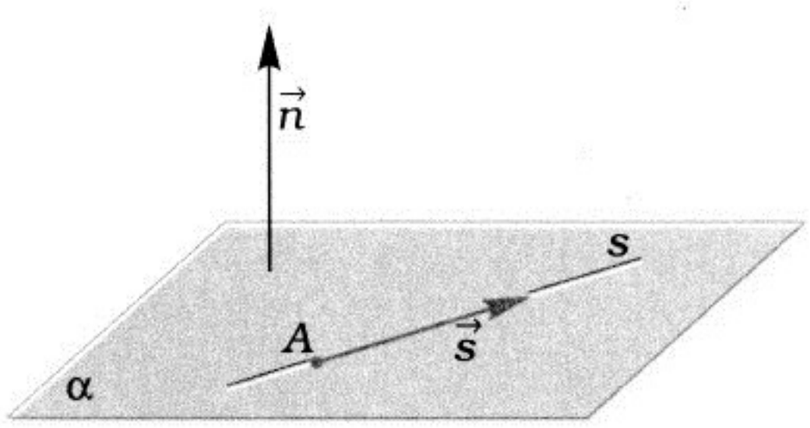
11. SIRGE JA TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID

Täida lüngad.

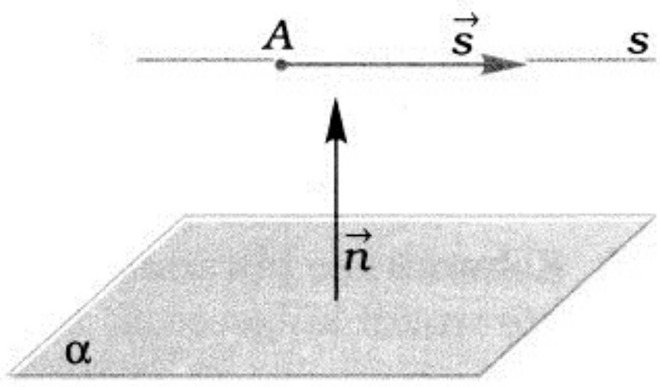
Olgu antud sirge s: $\frac{x-x_1}{s_x}=\frac{y-y_1}{s_y}=\frac{z-z_1}{s_z}$ ja tasand α: $Ax+By+Cz+D=0$.

1. **Sirge s asub tasandil** α parajasti siis, kui sirgel olev punkt $A(x_1; y_1; z_1)$ . . . . . tasandil ja sirge sihivektor on risti tasandi . . . . . vektoriga $\vec{n}=(A; B; C)$.

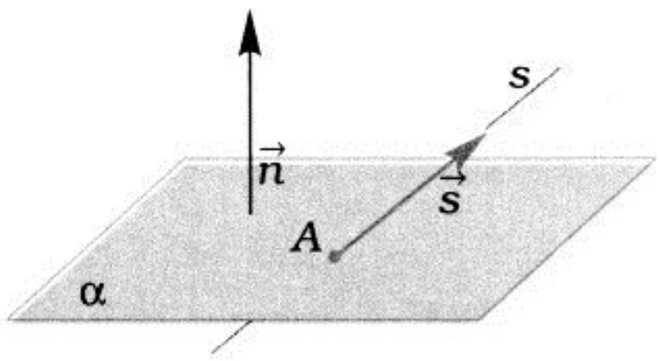
   Seega punkti A koordinaadid rahuldavad tasandi α võrrandit, st $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ja $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$ ehk $s_xA+s_yB+s_zC=0$.



2. **Sirge s on paralleelne tasandiga** α parajasti siis, kui sirge sihivektor on . . . . . tasandi normaalvektoriga ning sirget määrav punkt . . . . . tasandil, st $s_xA+s_yB+s_zC=0$ ja $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$.

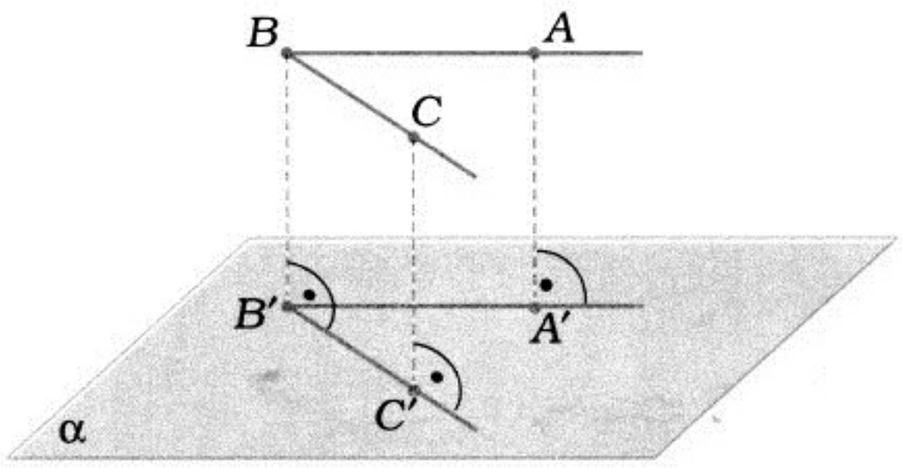


3. **Sirge s ja tasand** α **lõikuvad** parajasti siis, kui sirge sihivektor . . . . . tasandi normaalvektoriga, st $s_xA+s_yB+s_zC\neq 0$.



4. **Kaldsirge ja tasandi vaheliseks nurgaks** nimetatakse kaldsirge ja tema ristprojektsiooni vahelist nurka. Kaldsirge ja tasandi vahelise nurga leiame valemiga . . . . . $=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$.

5. **Nurga *ABC* projektsioon** tasandil on nurk $A'B'C'$, kus A' ja C' on nurga haaradel valitud punktide A ja C projektsioonid ning B' nurga tipu B projektsioon sellel tasandil.



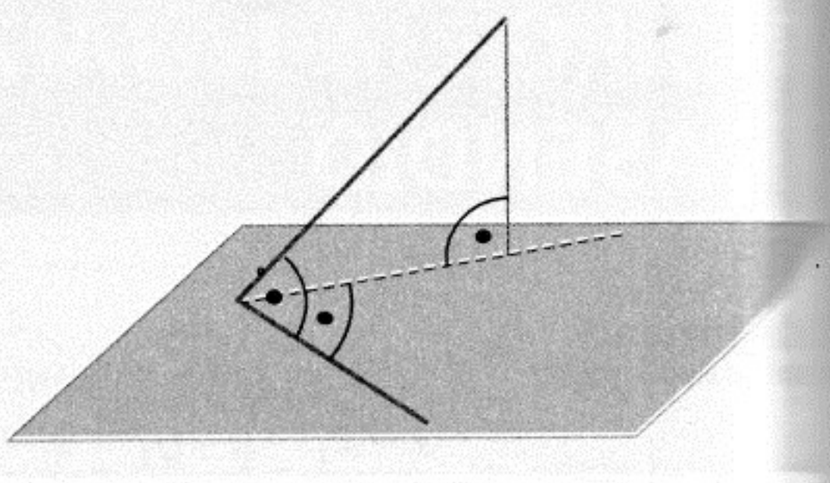
6. Kolme ristsirge teoreem

Täisnurga projektsioon tasandil on täisnurk siis

ja ainult siis, kui täisnurga üks haar asub

. . . . . võ̃i on sellega paralleelne

ja teine haar ei ole risti tasandiga.



7. Lahenda ülesanne. Märgi andmed ülalolevale joonisele.

Tasandit punktis *A* lõikav sirge moodustab tasandiga nurga 30°. Kui kaugel punktist *A* asub selle sirge punkt, mille kaugus tasandist on 4 cm?

Vastus.

8. Kolmnurkse püramiidi külgservad moodustavad püramiidi põhjaga 30°-sed nurgad. Le püramiidi külgservad, teades, et püramiidi kõrgus on 6 cm.

Vastus.

12. KAHETAHULINE NURK

Täida lüngad.

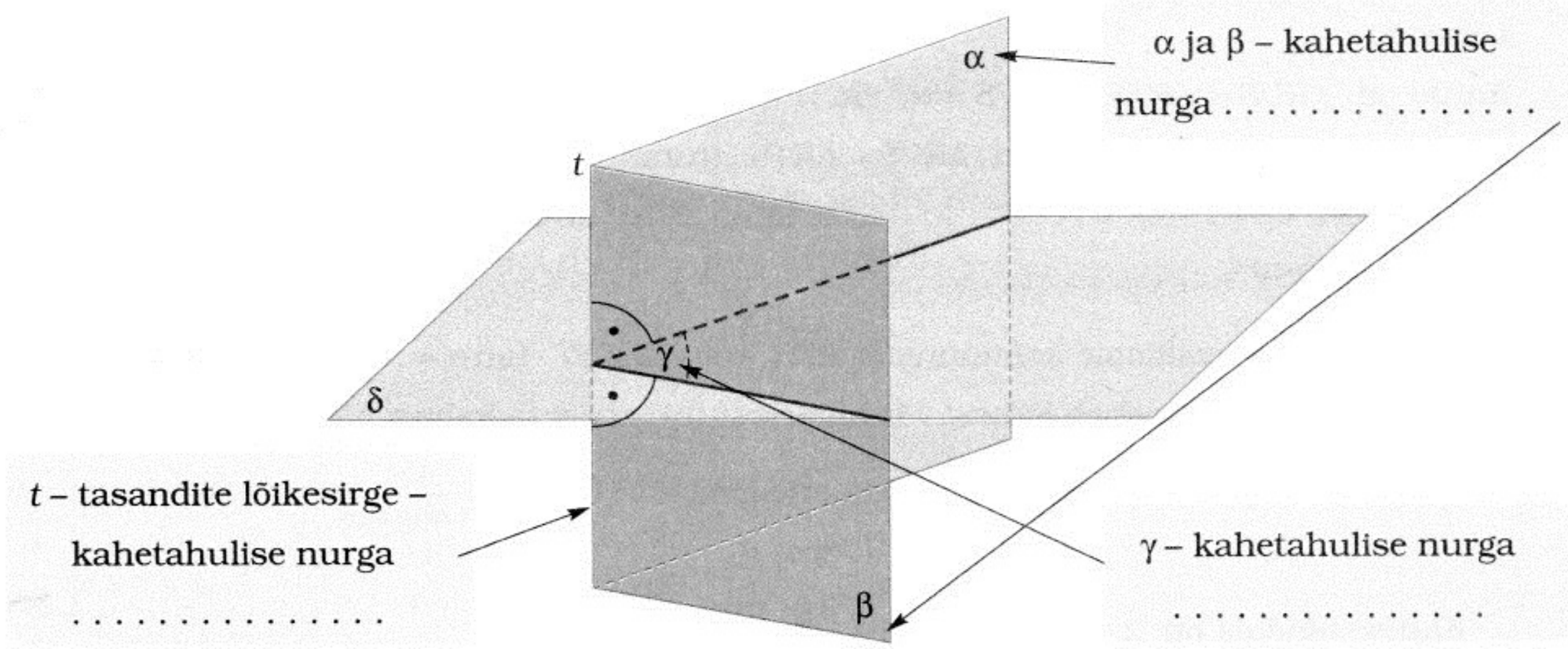
1. **Kujundit, mille moodustavad kaks ühest ja samast sirgest väljuvat pooltasandit, nimetatakse . . . . . nurgaks.**

2. Pooltasandeid, mis moodustavad kahetahulise nurga, nimetatakse selle nurga . . . . . ja pooltasandite lõikesirget kahetahulise nurga. . . . . .

3. Lõigates kahetahulise nurga tahke tasandiga, mis on risti selle kahetahulise nurga servaga, saame nurga, mida nimetatakse kahetahulise nurga . . . . . .

4. Kahetahulised nurgad on võrdsed, kui nende joonnurgad on . . . . . .

5.



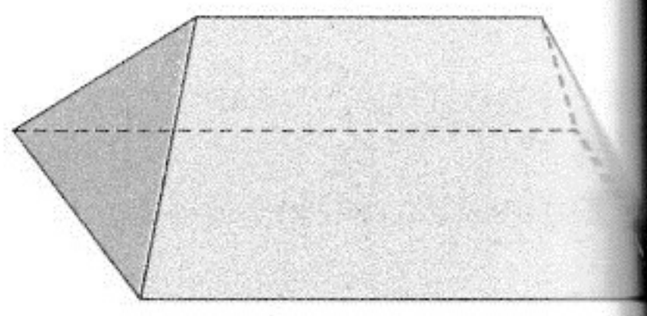
6. Kahetahulise nurga ühel tahul olev punkt on 20 cm kaugusel nurga servast. Kui kaugel on see punkt teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on 30°?

Selgitav joonis.

Lahendus.

Vastus.

7. *RE 2001* (20 p). Telgi põhjaks on ristkülik, mille pikkus on a ja laius b. Telgi katus koos kahest kolmnurgast ja kahest trapetsist, mis lõikuvad horisontaaltasapinnaga nurga Leia



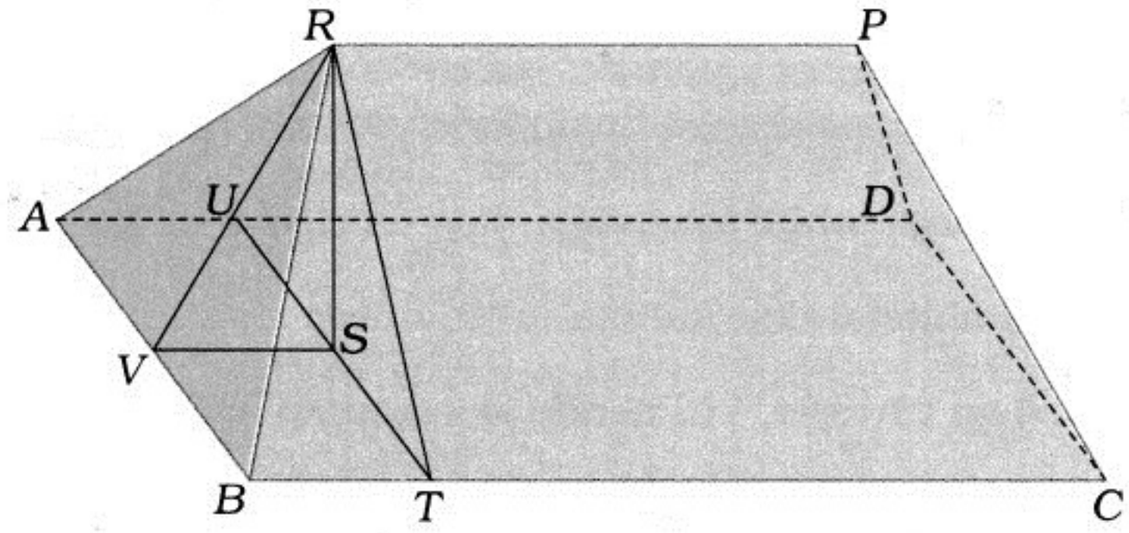
a) telgi harja pikkus,

b) telgi kõrgus,

c) telgi katuse pindala,

d) telgi ruumala.

Selgitav joonis.



Lahendus.

Antud on $\angle RUS = \angle RTS = \angle RVS = \alpha$, $BC = AD = a$ ja $AB = DC = b$.

a) Täisnurksed kolmnurgad on $\Delta RVS = \Delta RTS$ (tunnus . . . . . .).

Seega BT = ... = ... = $0{,}5b$, kuna $BTSV$ on ruut ja telgiharja pikkus on

$RP = a - 2SV$ = ...

b) Telgi kõrguse avaldame kolmnurgast RTS, kus $RS = ST \cdot \tan\alpha$ = ... ·

c) Katuse pindala koosneb kahest võrdhaarsest trapetsist ja kahest võrdhaarsest kolmnurgast, kusjuures mõlemal kujundil on sama kõrgus $RV = \dfrac{VS}{\cos\alpha} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ \cos\alpha}$.

Katuse pindala on $2 \cdot \left(\dfrac{BC + RP}{2} \cdot TR + \dfrac{AB \cdot RV}{2} \right) =$

. . . . . =

d) Ruumala leiame kahe püramiidi $ABTUR$ ja pikali oleva kolmnurkse püstprisma (põhi on RUT ja kõrgus RP) ruumalade summana:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b \cdot 0{,}5b \cdot 0{,}5b \tan\alpha \right) + \frac{b \cdot 0{,}5b \tan\alpha}{2} \cdot (a - b) =$$

. . . . . $= \dfrac{1}{12} b^2 \tan\alpha(3a -$

Vastus.

a) . . . . . .

b) . . . . . .

c) . . . . . .

d) . . . . . .

HARJUTUSÜLESANDED

1. Koosta sirge parameetrilised ja kanoonilised võrrandid, kui sirge läbib punkte $K(2; -1; 5)$ ja $L(5; -1; 7)$.

2. Punktide A ja B kohavektorid on vastavalt $\vec{a} = (5; 2; -3)$ ja $\vec{b} = (4; -2; -1)$. Leia sellise tasandi võrrand, mis on risti lõiguga AB ja läbib selle lõigu keskpunkti.
3. Leia tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $A(3; 2; -7)$ ja on paralleelne xy-tasandiga.
4. Leia tasandi võrrand, kui tasand läbib punkte $A(2; -1; 3)$ ja $B(3; 1; 2)$ ning on paralleelne vektoriga $\vec{a} = (3; -1; 4)$.
5. Leia punktid, kus tasand $3x - 2y + z + 12 = 0$ läbib koordinaattelgi, ning kujuta seda tasandit koorinaatteljestikus.
6. Määra sirgete u ja v vastastikune asend ning leia nendevaheline nurk.

   u: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{2}$ ja v: $\frac{x-5}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{2}$
7. Määra sirge u ja tasandi α vastastikune asend. Lõikumisel leia lõikepunkt ning nurk nende vahel.

   u: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ ja α: $x + 2y + 3z - 29 = 0$
8. Leia parameetri p väärtused, mille korral tasandid ristuvad.

   α: $px + 2y + 2z - 1 = 0$ ja β: $(p+1)x + py - 5z + 3 = 0$

Vastused

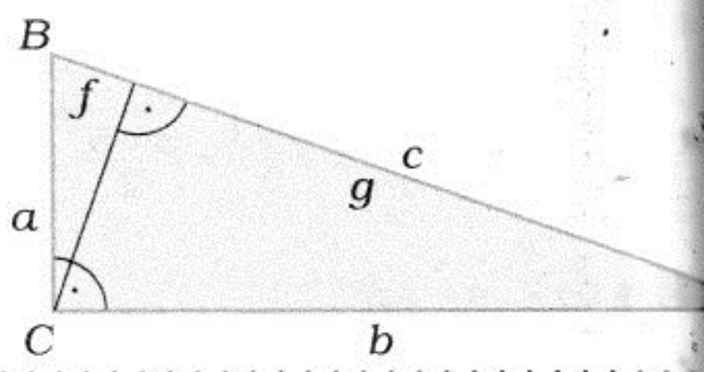
1. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ ja $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{2}$
2. $x + 4y - 2z - 8{,}5 = 0$
3. $z + 7 = 0$
4. $x - y - z = 0$
5. $(-4; 0; 0)$, $(0; 6; 0)$, $(0; 0; -12)$
6. Lõikuvad, nurk $38°13'$
7. Lõikepunkt $(6; 4; 5)$, nurk $62°59'$
8. $p_1 = -5$ ja $p_2 = 2$

13. PLANIMEETRIA KORDAMINE

1. Täida lüngad.

	Ümbermõõt	**Pindala**
Rööpkülik	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots = \ldots\ldots \cdot \sin\gamma$
Ristkülik	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Ruut	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots =$
Romb	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots =$
Kolmnurk	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots =$ $= p \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot \ldots\ldots}{2} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$
Võrdkülgne kolmnurk	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$h = \ldots\ldots\ldots$, $S = \frac{\sqrt{3} \cdot \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$
Täisnurkne kolmnurk	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Trapets	$P = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Ring	$C = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Kirjuta järgmiste teoreemide sõnastus ja valemid ning seleta tähised.



a) Pythagorase teoreem

. . . . . .

. . . . . .

b) Eukleidese teoreem

. . . . . .

. . . . . .

c) Täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreem

. . . . . .

. . . . . .

d) Thalese teoreem

. . . . . .

. . . . . .

e) Kiirteteoreem

. . . . . .

. . . . . .

3. Täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

a) $\sin\alpha =$

$\sin\beta =$

b) $\cos\alpha =$

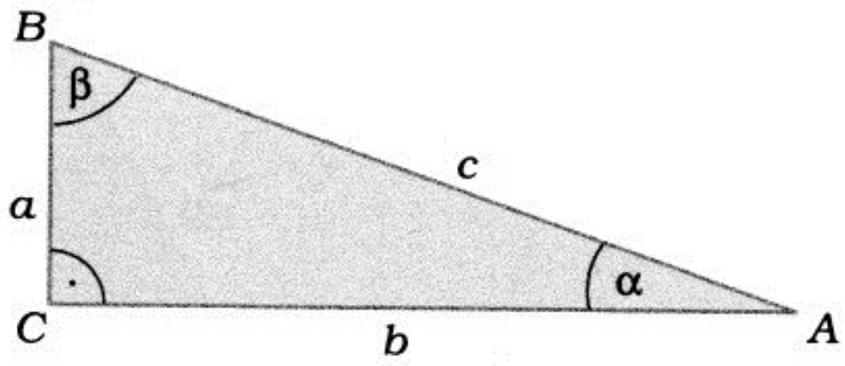
$\cos\beta =$

c) $\tan\alpha =$

$\tan\beta =$

d) $\cot\alpha =$

$\cot\beta =$



4. Seleta mõisted.

a) Kolmnurga mediaan . . . . . .

Mediaanide omadus . . . . . .

. . . . . .

b) Apoteem . . . . . .

. . . . . .

c) Kesknurk . . . . . .

. . . . . .

d) Piirdenurk . . . . . .

. . . . . .

e) Kõõl . . . . . .

f) Kolmnurga kesklõik . . . . . .

Kolmnurga kesklõigu omadus . . . . . .

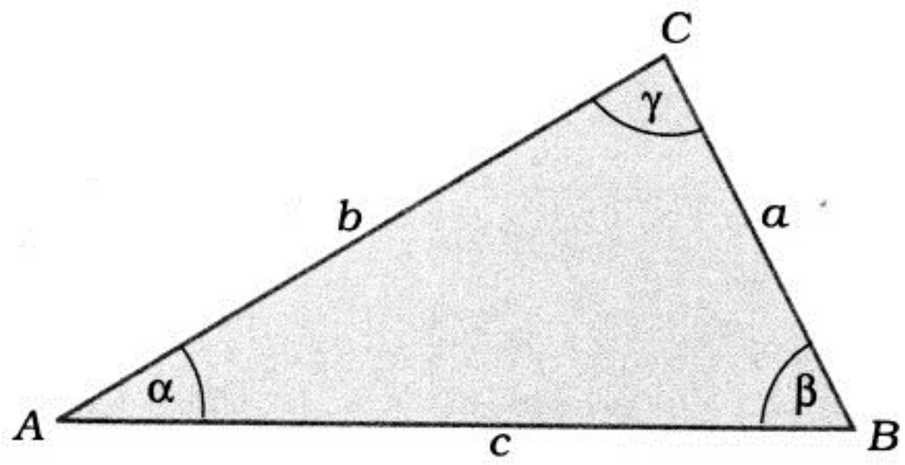
. . . . . .

g) Trapetsi kesklõik . . . . . .

Trapetsi kesklõigu omadus . . . . . .

. . . . . .

5. Kirjuta järgmiste teoreemide sõnastus ja valemid.



a) Siinusteoreem

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

b) Koosinusteoreem

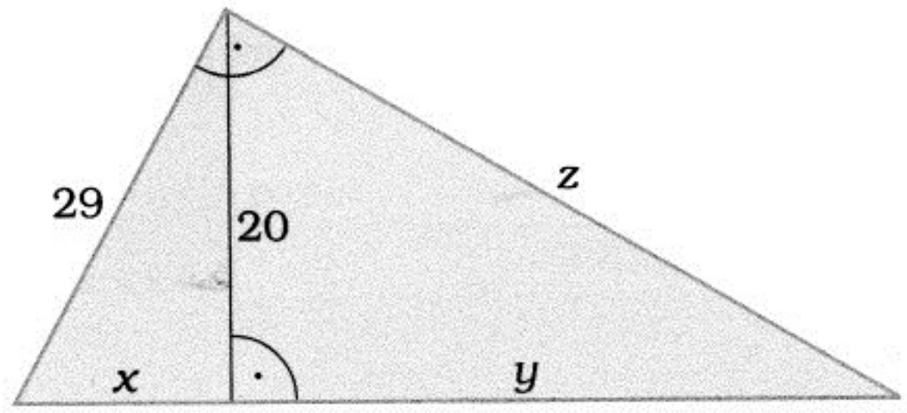
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

6. Leia jooniselt puuduvad suurused.

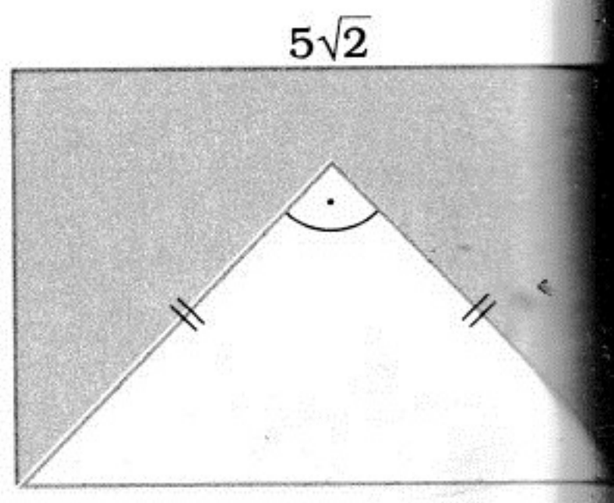


Pythagorase teoreemi põhjal $x =$ . . . . . .

Kasutades täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreemi, saame $y =$ . . . . . .

Kasutades . . . . . ., saame $z =$ . . . . . .

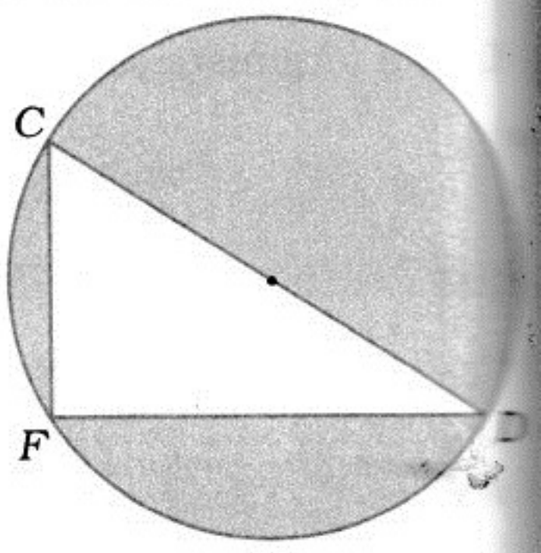
7. Leia värvitud kujundi täpne pindala.



Vastus. Kujundi täpne pindala on $\left(15\sqrt{2} - 12{,}5\right)$ üh^2.

8. Leia värvitud kujundi täpne pindala, kui kolmnurga külg CD on ringjoone diameetriks ning $CF = 8$ cm ja $DF = 15$ cm.

Kolmnurk on täisnurkne, kuna . . . . . .



Vastus. Kujundi täpne pindala on $(72{,}25\pi - 60)$ cm^2.

9. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 10 dm. Arvuta selle kaateti pikkus, mille projektsioon hüpotenuusil on 3,6 dm.

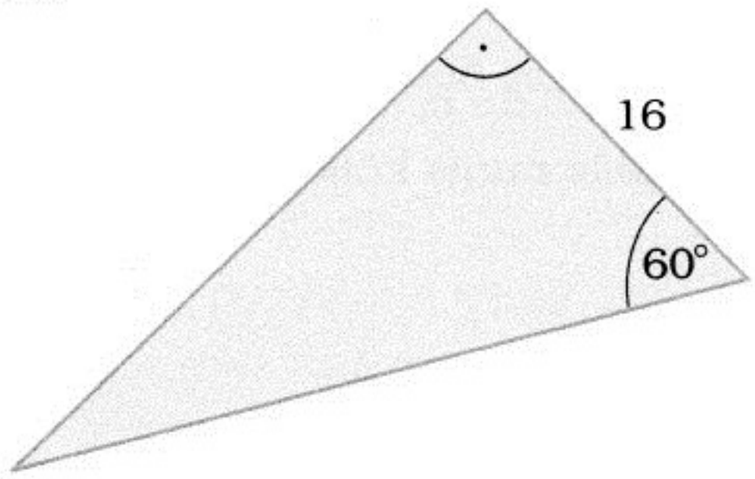
Kasutades . . . . . teoreemi, saame

Vastus. Selle kaateti pikkus on . . . . . dm.

10. Leia kindlusetorni kõrgus meetri täpsusega, kui selle vari on 15 m pikkune ja päikesekiired langevad 62° nurga all.

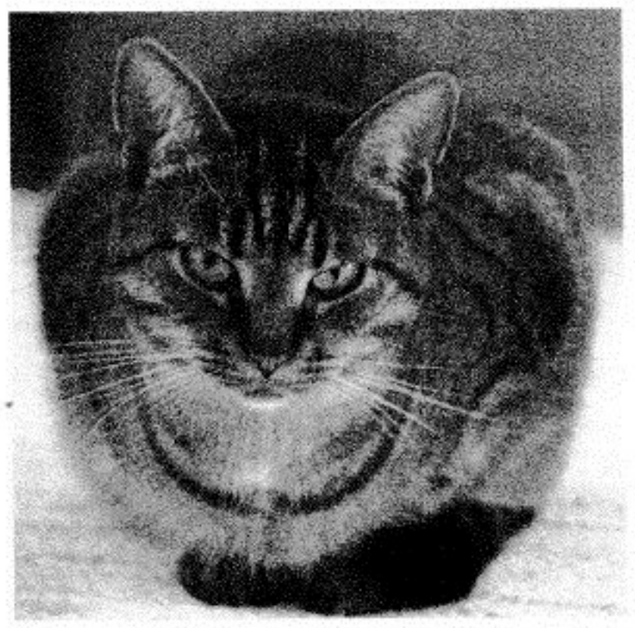
Vastus. Kõrgus on ligikaudu . . . . . m.

11. Lahenda kolmnurk ja leia pindala. Vastused anna täpselt.



Vastus. Kolmnurga puuduv kaatet on . . . . . üh, hüpotenuus . . . . . üh, teine teravnurk . . . . . .° ja pindala $128\sqrt{3}$ üh^2.

12. Kass Kiku istub maja juures sissesõiduteel. Temast vasakul kasvab kask ja paremal pool tee ääres pihlakas. Kiku märkab kase otsas musträstast ning pihlaka otsas varblast. Mõlemad linnud on Kikust samal kaugusel, kusjuures musträstas on umbes 4 m kõrgusel puu otsas ja varblane 2,5 m kõrgusel. Puudevaheline kaugus on ligikaudu 5 m. Kui kaugel on Kiku kasest ja pihlakast?

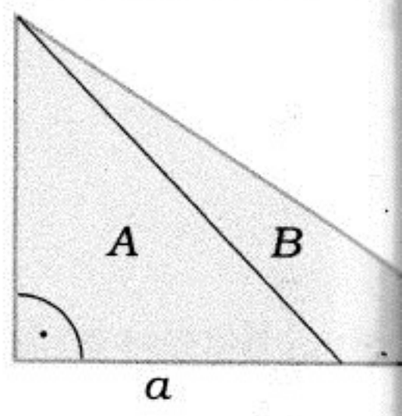


Vastus. Kiku on kasest ligikaudu 1,5 m ja pihlakast 3,5 m kaugusel.

13. Rööpküliku lähisküljed on 12,5 cm ja 6,8 cm ning teravnurk 35°. Leia rööpküliku pikemale küljele joonestatud kõrgus, ümbermõõt ja pindala.

Vastus. Kõrgus on ligikaudu ..... cm, ümbermõõt ..... cm ja pindala ligikaudu 49 cm^2.

14. On antud täisnurkne kolmnurk, kus $a = 5$ cm, $b = 3$ cm ja kolmnurga B pindala $S_B = 24$
Leia kolmnurga A pindala.

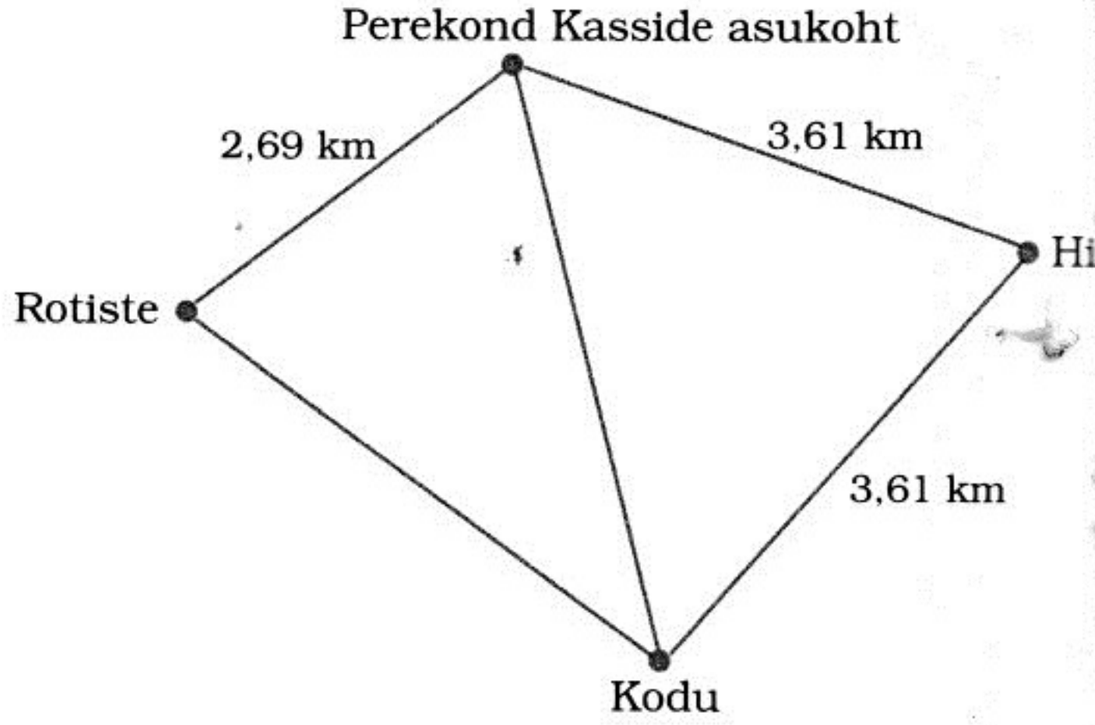


Vastus. Kolmnurga A pindala on 40 cm^2.

15. Kolmnurga küljed on 25 cm, 29 cm ja 36 cm. Leia kolmnurga kõige lühem kõrgus.

Vastus. Kõige lühem kõrgus on 20 cm.

16. Perekond Kassid tahtis koju sõita, kuid nende tavaline kodutee oli remondis. Oli ka ümbersõiduvõimalust: kas läbi Rotiste või läbi Hiireküla. Perekond on väga kokkuho ja peab õigeks kõige lühemat teed pidi minna. Teada on, et üks tee koosneb kahest s pikast lõigust, kumbki 3,61 km pikk. Teisest teest on teada ainult esimese teeosa pi mis on 2,69 km. Remondis olev maanteelõik on 4 km pikk. Veel on teada, et Rotiste ja küla vaheline kaugus on 5,59 km. Kumb ümbersõit on lühem ning kui palju? Vastus 10 meetri täpsusega.



Vastus. Ümbersõit läbi . . . . . on lühem . . . . . meetri võrra.

17. Ringi sisse on kujundatud trapets, mille tipud asuvad ringjoonel, pikem alus ühtib ringi diameetriga, lühem alus aga on võrdne haaradega. Leia trapetsi pindala, kui ringi raadius on 10 cm.

Vastus. Trapetsi pindala on $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ dm².

18. Leia täisnurkse kolmnurga küljed, kui selle siseringjoone raadius on 6 cm ja ümberringjoone raadius 15 cm.

Vastus. Kaatetid on 18 cm ja 24 cm ning hüpotenuus 30 cm.

TEST

1. Kesknurgaks nimetatakse nurka, mille
   a) tipp on ringjoone keskpunktis,
   b) moodustavad kaks lõikuvat sirget,
   c) tipp asub ringjoonel,
   d) moodustavad kaks ühise otspunktiga kõõlu.

2. Piirdenurgaks nimetatakse nurka, mille
   a) tipp asub ringjoone keskpunktis,
   b) tipp asub ringjoonel,
   c) moodustavad kaks ühise otspunktiga kõõlu,
   d) moodustavad kaks raadiust.

3. Piirdenurk moodustab poole vastavast
   a) kõrvunurgast, b) sirgnurgast, c) kesknurgast, d) tippnurgast.

4. Diameetrile toetuv piirdenurk on
   a) täisnurk, b) sirgnurk, c) teravnurk, d) nürinurk.

5. Kesknurk, mis toetub kaarele suurusega 40°, on
   a) 20°, b) 40°, c) 80°, d) 160°.

6. Hulknurga sisenurkade summa
   a) on $n \cdot 180°$,
   b) on $\frac{n \cdot 180°}{2}$,
   c) on $(n-2) \cdot 180°$,
   d) sõltub nurkade suurusest.

7. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe võrdub nende hulknurkade vastavate külgede p

a) jagatisega, b) korrutisega, c) summaga, d) jagatise r

8. Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe võrdub nende hulknurkade vastavate k pikkuste

a) jagatisega, b) korrutisega, c) vahega, d) korrutise ruu

9. Korrapärase 30-nurga iga sisenurga suurus

a) on 10°,

b) on 168°,

c) on 60°,

d) sõltub külje pikkusest.

10. Korrapärase hulknurga siseringjoone raadiust nimetatakse hulknurga

a) kõrguseks, b) apoteemiks, c) diagonaaliks, d) mediaa

11. Korrapärase hulknurga pindala on võrdne selle hulknurga

a) ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega,

b) poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega,

c) külgede pikkuste korrutisega,

d) küljepikkuse ja apoteemi korrutisega.

12. Ringjoone puutuja on

a) paralleelne raadiusega,

b) risti puutepunkti joonestatud raadiusega,

c) risti diameetriga,

d) risti lõikajaga.

13. Ringi osa, mida piirab kõõl ja selle otspunkte ühendav kaar, nimetatakse ringi

a) sektoriks, b) diameetriks, c) kõõluks, d) segmen

14. Sektori pindala, mille sektorinurk on $\frac{\pi}{6}$ ja ringi raadius 6 cm, on

a) 6π cm^2, b) 12π cm^2, c) 3π cm^2, d) 36π cm^2.

15. Lõiku, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, nimetatakse kolmnurga

a) apoteemiks, b) kõrguseks, c) mediaaniks, d) kesklõigu

16. Lõiku, mis ühendab kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse kolmnu

a) apoteemiks, b) kõrguseks, c) mediaaniks, d) keskristsi

17. Kui kolmnurga kaks külge on pikkusega 2 cm ja 4 cm ning nendevaheline nurk 45°, s kolmnurga pindala on

a) $4\sqrt{2}$ cm^2, b) $2\sqrt{2}$ cm^2, c) $\sqrt{2}$ cm^2, d) 2,5 cm^2.

18. Kolmnurgas on

a) kaks mediaani, mille lõikepunkt jaotab kummagi mediaani suhtes 2 : 1 vastava pust alates;

b) kolm mediaani, mis kõik lõikuvad punktis, mis jaotab mediaani suhtes 2 : 1 vas vast tipust alates;

c) kolm mediaani, mis kõik lõikuvad punktis, mis jaotab mediaani suhtes 3 : 2 vastavast tipust alates;

d) kolm mediaani, mis kõik lõikuvad ühes punktis ainult siis, kui kolmnurk on võrdkülgne.

19. Kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub

a) mediaanide lõikepunktis,

b) nurgapoolitajate lõikepunktis,

c) kõrguste lõikepunktis,

d) külgede keskristsirgete lõikepunktis.

20. Kolmnurga siseringjoone keskpunkt asub

a) mediaanide lõikepunktis,

b) nurgapoolitajate lõikepunktis,

c) kõrguste lõikepunktis,

d) külgede keskristsirgete lõikepunktis.

21. Rööpküliku diagonaalide pikkuste ruutude summa on võrdne

a) külgede pikkuste summaga,

b) lähiskülgede pikkuste korrutisega,

c) külgede pikkuste ruutude summaga,

d) lähiskülgede pikkuste ruutude summa kahekordsega.

22. Kui rööpküliku lähisküljed on pikkusega 2 cm ja 4 cm ning nendevaheline nurk on 45°, siis rööpküliku pindala on

a) $4\sqrt{2}$ cm^2, b) $8\sqrt{2}$ cm^2, c) $\sqrt{2}$ cm^2, d) 5,5 cm^2.

23. Ristküliku diagonaal jaotab ristküliku

a) nurga kaheks võrdseks osaks,

b) kaheks võrdseks kolmnurgaks,

c) kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks,

d) kaheks võrdkülgseks kolmnurgaks.

24. Rombi diagonaalid

a) jaotavad teineteise osadeks, mis suhtuvad nagu 2 : 1,

b) poolitavad teineteist ja on risti,

c) poolitavad teineteist ega ole risti,

d) on risti ja lõikepunkt on võrdsetel kaugustel tippudest.

25. Trapetsi pindala võrdub

a) aluste pikkuste poolsumma ja kõrguse korrutisega,

b) aluse ja kõrguse korrutisega,

c) aluste pikkuste poole korrutisega,

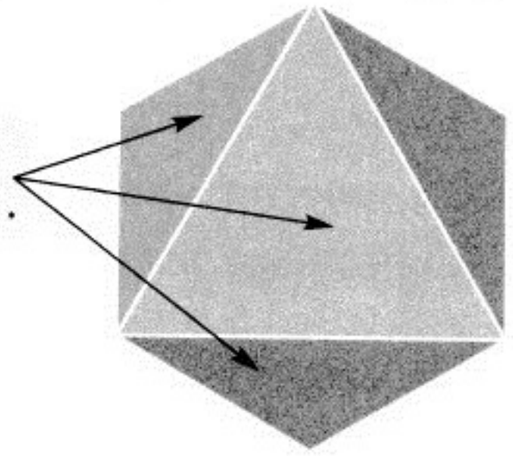
d) diagonaalide poole korrutisega.

14. HULKTAHUKAD

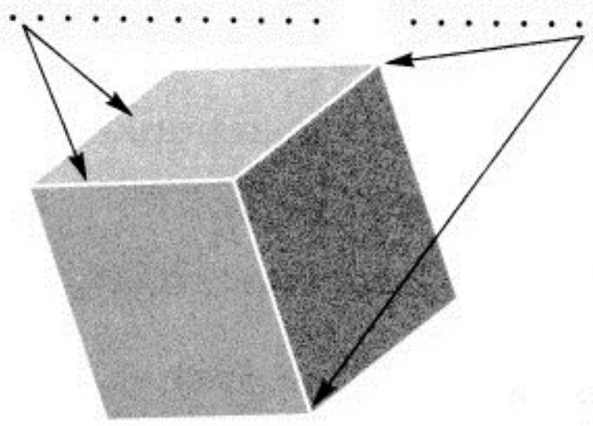
Täida lüngad.

1. Hulktahukaks ehk . . . . . nimetatakse hulknurkadega piiratu geomeetrilist keha.

2. Märgi allolevatele joonistele järgmised mõisted:
a) tahud, b) servad, c) tipud, d) diagonaal, e) diagonaallõig

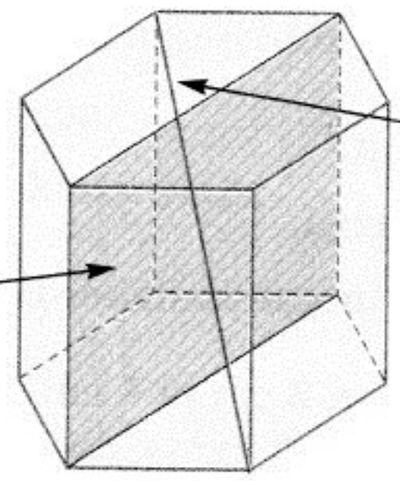


. . . . . .



. . . . . .

. . . . . .



. . . . . .

3. Hulktahukad jagunevad kumerateks ja mittekumerateks hulktahukateks.

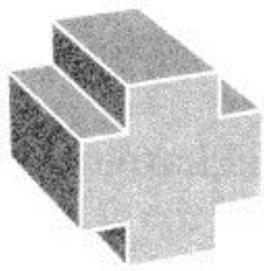
4. Kumera hulktahuka iga . . . . . punkti ühendav lõik jääb hulktahuka . . . . Mittekumera hulktahuka korral ei ole see tingimus täidetud.

5. Kumera hulktahuka tahkude, servade ja tippude arve seob **EULERI teoreem**. Kui kumeral hulktahukal on T tippu, S serva ja R tahku, siis

. . . . . = 2.

6. Milline hulktahukatest on kumer, milline mittekumer?

. . . . . .



. . . . . .

. . . . . .

7. Korrapäraseks hulktahukaks ehk . . . . . nimetatakse kum hulktahukat, mille kõik . . . . . on omavahel võrdsed . . . . . hulknurgad ja kõik mitmetahulised nurgad on . . . .

8. On olemas ainult . . . . platoonilist keha. Need on

a) korrapärane tetraeeder –

. . . .

b) kuup ehk korrapärane heksaeeder –

. . . .

c) korrapärane oktaeeder –

. . . .

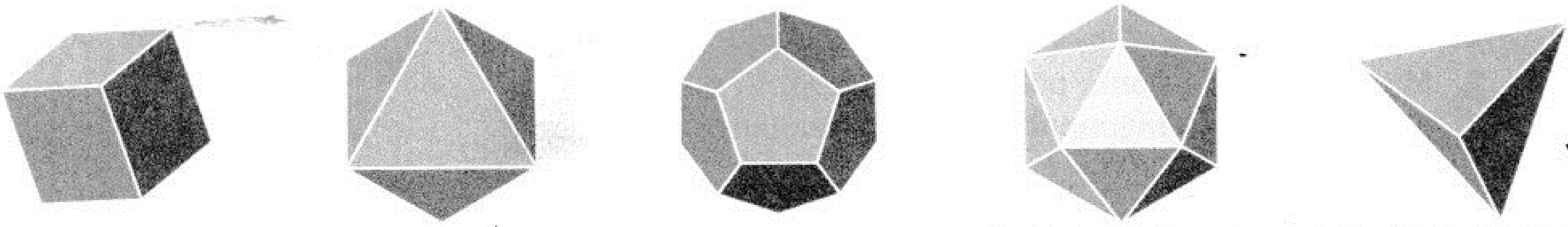
d) korrapärane ikosaeeder –

. . . .

e) korrapärane dodekaeeder –

. . . .

9. Mis on mis?

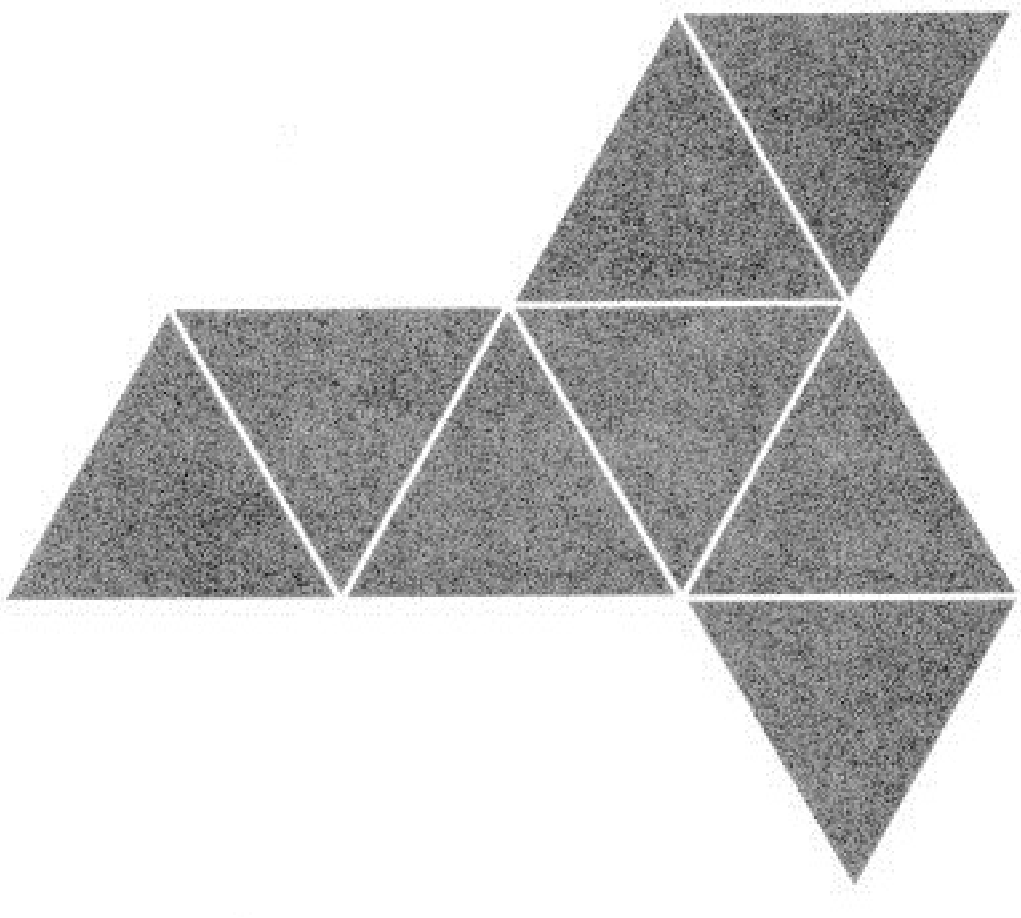


. . . .

10. Praktiline töö.

Tutvu arvutiklassis Poly programmiga (www.peda.com/polypro/Welcome.html).Vali välja üks hulktahukas (näiteks üks viiest platoonilisest kehast). Trüki selle pinnalaotus ja suurenda mõõtmeid nii, et saaksid meisterdada hulktahuka. Leia keha täispindala ja ruumala.

Näiteks on toodud oktaeedri pinnalaotus ilma kokkukleepimiseks vajalike äärteta.



Kui serva pikkus on a, siis $S_t = \ldots\ldots \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{\ldots\ldots}}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

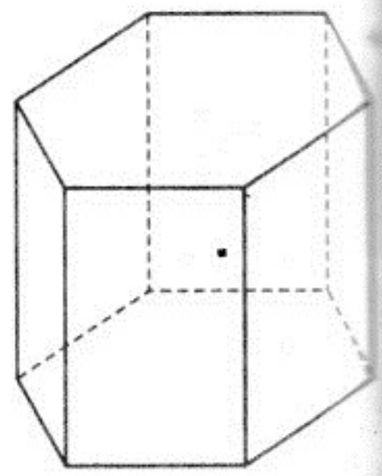
Ruumala saab leida valemiga $V = \dfrac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$. Kuidas on võimalik veel ruumala arvutada?

15. PRISMA

Täida lüngad.

1. Hulktahukat, mille kaks . . . . . on vastavalt . . . . . ja v
külgedega hulknurgad ning ülejäänud tahud . . . . . , millel on k
hulknurgaga üks ühine külg, nimetatakse **prismaks**. Paralleelseid tahke nimetatak
ma . . . . . , ülejäänud tahke aga külgtahkudeks. Lõik, mis ühendab
erinevatele tahkudele kuuluvat . . . . . ., on prisma. . . . . .
Kui lõigata prismat tasandiga, mis läbib prisma kaht mitte ühele tahule kuuluvat k
va, saadakse prisma **diagonaallõige**.

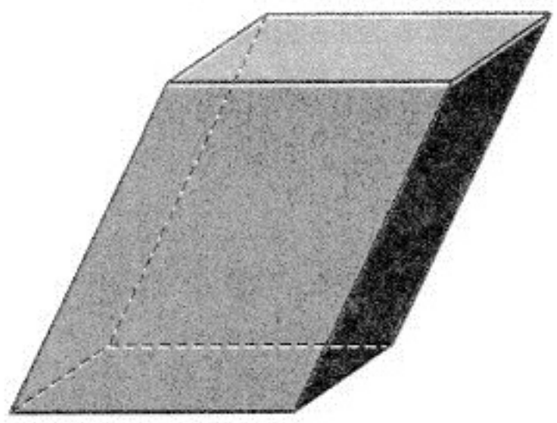
2. Märgi joonisel prisma põhjad ja külgtahud ning täienda joonist prisma diagonaali ja diagonaallõikega.



3. Kui prisma külgservad on põhjaga risti, siis nimetatakse prismat **püstprismaks**. Püs
ma külgtahkudeks on . . . . . Kui prisma külgservad
. . . . . risti, siis nimetatakse prismat **kaldpris**

4. Joonesta kaldprisma kõrvale vabalt valitud püstprisma.

Kaldprisma



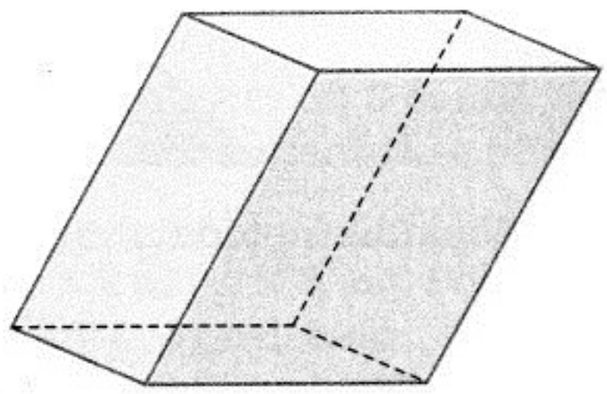
Püstprisma

5. **Korrapäraseks prismaks** nimetatakse püstprismat, mille põhjadeks on . . . . . .
. . . . . hulknurgad. **Mittekorrapäraseks** nimetatakse **prisma**
ei ole püstprisma, või sellist püstprismat, mille . . . . . pole korrapä
hulknurgad. Prisma põhjade vaheline kaugus on prisma . . . . . .

6. **Prisma ristlõikeks** nimetatakse prisma külgservadega . . . . . .
tasandi ja prisma lõiget.

7. Joonesta mõni korrapärane ja mõni mittekorrapärane prisma. Märgi joonisele iga prisma kõrgus.

8. Täienda kaldprisma joonist prisma kõrguse ja ristlõikega.



9. **Külgpindala $S_k = P \cdot l$**, kus P on ristlõike . . . . . ja l on . . . . . .

Püstprisma korral l =. . . . . ja püstprisma ristlõikena võib vaadelda püstprisma

. . . . . , seega **püstprisma külgpindala** avaldub S_k = ...

10. **Täispindala S_t** = ... + ...

11. **Ruumala V** = ...

12. **Rööptahukaks** nimetatakse prismat, mille põhjadeks on . . . . . .

Rööptahuka kõik kuus tahku on. . . . . Vastastahud on võrdsed ja

. . . . . , diagonaalid lõikuvad ühes ja samas punktis, mis

. . . . . iga diagonaali. **Püströöptahukaks** nimetatakse püstprismat, mille

põhjadeks on kaks . . . . . rööpkülikut.

13. **Risttahukaks** nimetatakse püströöptahukat, mille põhjadeks on . . . . . .

Risttahuka kõik tahud on . . . . . Risttahuka diagonaalid on

. . . . . ja **diagonaali pikkus** avaldub valemiga

$$d = \sqrt{\text{. . . . . + ... + ...}},$$

kus a, b ja c on risttahuka servade pikkused.

Täispindala $S_t = 2 \cdot \left(\text{. . . . . + ... + ...} \right)$

Ruumala V = ...

14. **Kuup** on risttahukas, mille . . . . . on võrdsed. Kuubil on ühesuurust ruudukujulist tahku.

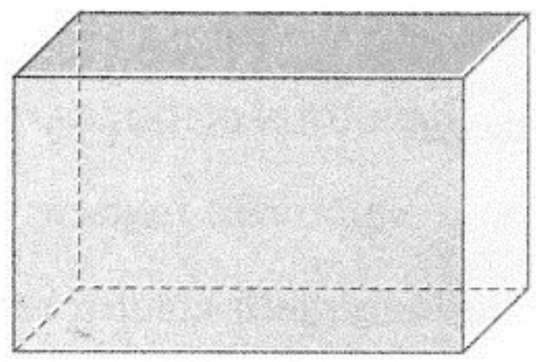
Täispindala $S_t = 6 \cdot$ . . . . . .

Ruumala $V =$ . . . . . .

Diagonaal $d = a \cdot$ . . . . . .

15. Püströöptahuka põhi on rööpkülik külgedega 2 m ja 5 m ning teravnurgaga 30°. Püströöptahuka külgserv on 10 m. Leia püströöptahuka täispindala ja ruumala.
Täienda jooniseid vajalike arvandmetega.

Üldvaade



Põhi

Põhjapindala leidmiseks kasuta rööpküliku pindala valemit $S = ab \cdot \sin\alpha$.

$S_p = 2 \cdot$ . . . . . $\cdot \sin$ . . . . . $=$ . . . . . .

Külgpindala leidmiseks leia kõigepealt põhja ümbermõõt $P = 2 \cdot (a + b)$.

$P =$ . . . . . .

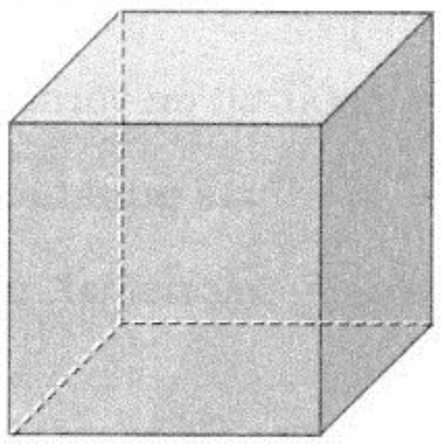
Nüüd $S_k = P \cdot H =$ . . . . . $\cdot 10$.

Täispindala $S_t = S_k + 2 \cdot S_p =$ . . . . . $+$ . . . . . $=$ . . . . . .

Ruumala $V = S_p \cdot H =$ . . . . . .

Vastus. Täispindala on 150 m^2 ja ruumala 50 m^3.

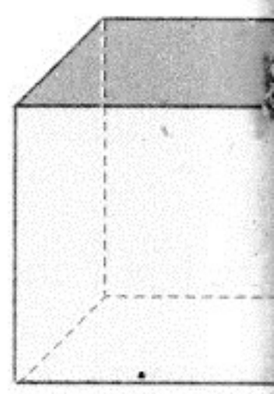
16. Kui pikk peab olema kuubi serv, et kuubi pindala ja ruumala arvväärtused oleksid võrdsed?



Vastus. Kuubi serva pikkus peab olema 6 pikkusühikut.

17. Risttahuka pikkus on 4 cm, laius 3 cm. Risttahuka diagonaal moodustab põhjaga 40°. Leia risttahuka kõrgus ja diagonaal.

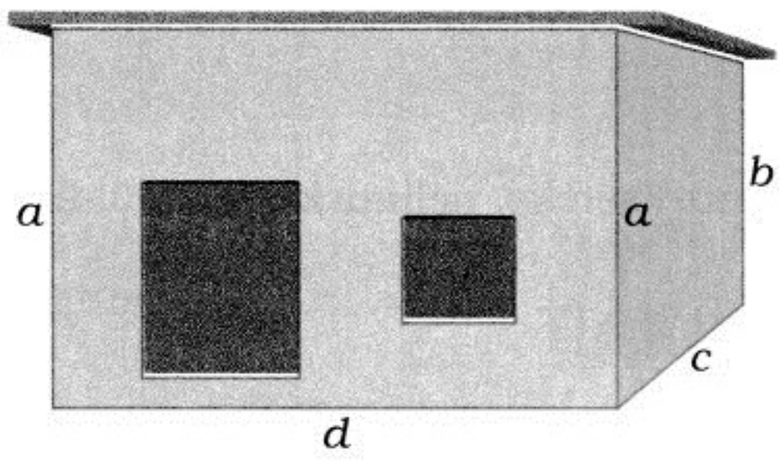
Täienda joonist vajalike arvandmetega.



Vastus.

HARJUTUSÜLESANDED

1. Kolmnurkse kaldprisma ristlõige on võrdkülgne kolmnurk kõrgusega $2\sqrt{3}$ cm. Prisma külgpindala on 120 cm^2. Arvuta prisma külgserv.
2. Risttahuka diagonaal on l ja see moodustab ühe tahuga nurga 30° ja teise tahuga 45°. Leia risttahuka täispindala ja ruumala.
3. Nelinurkse kaldprisma ristlõige on romb, mille diagonaalid on 9 cm ja 12 cm. Prisma külgpindala on 540 cm^2. Arvuta prisma külgserv.
4. Püströöptahuka põhiservad on $2\sqrt{2}$ cm ja 5 cm. Põhiservadevaheline teravnurk on 45°. Leia rööptahuka ruumala, kui tema lühem diagonaal on 7 cm.
5. Korrapärase prisma põhjaks on kolmnurk, mille külg on a, ja prisma kõrgus on b. Prismat on lõigatud tasandiga, mis läbib alumise põhja üht külge ja selle vastas olevat ülemise põhja tippu. Leia tekkinud lõike pindala.
6. Korrapärase kuusnurkse prisma külgserv on 3 cm. Prisma jaotub diagonaallõikega kaheks võrdseks nelinurkseks prismaks. Leia kuusnurkse prisma ruumala, kui nelinurkse prisma külgpindala on 30 cm^2.
7. Püströöptahuka põhiservad on 3,2 dm ja 2,3 dm. Põhja esimesele servale joonestatud kõrgus on 1,6 dm ja püströöptahuka kõrgus on 1,6 dm. Arvuta täispindala ja ruumala.
8. Arvuta korrapärase nelinurkse prisma diagonaal, kui põhja diagonaal on 8 cm ja külgtahu diagonaal 7 cm.
9. Papa Endel ehitas oma Ronnile kuudi, mille mõõdud olid järgmised: $a = 1$ m, $b = 80$ cm, $c = 0{,}85$ m ja $d = 1{,}48$ m. Millise kaldenurgaga paigaldas ta kuudi katuse? Kui palju värvi kulus tal kuudi külgede värvimiseks (ukse ja akna pindala pole tarvis arvestada), kui 4 m^2 katmiseks kulub 1 kg värvi?



10. Püstprisma põhjaks on trapets $ABCD$, mille alused on $AD = 39$ cm ja $BC = 22$ cm. Haarad on $AB = 26$ cm ja $CD = 25$ cm. Lõike AA_1C_1C pindala on 400 cm^2. Leia püstprisma ruumala.
11. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 14 cm ning rööptahuka lühema diagonaali ja põhja vaheline nurk on 60°. Leia püströöptahuka ruumala.

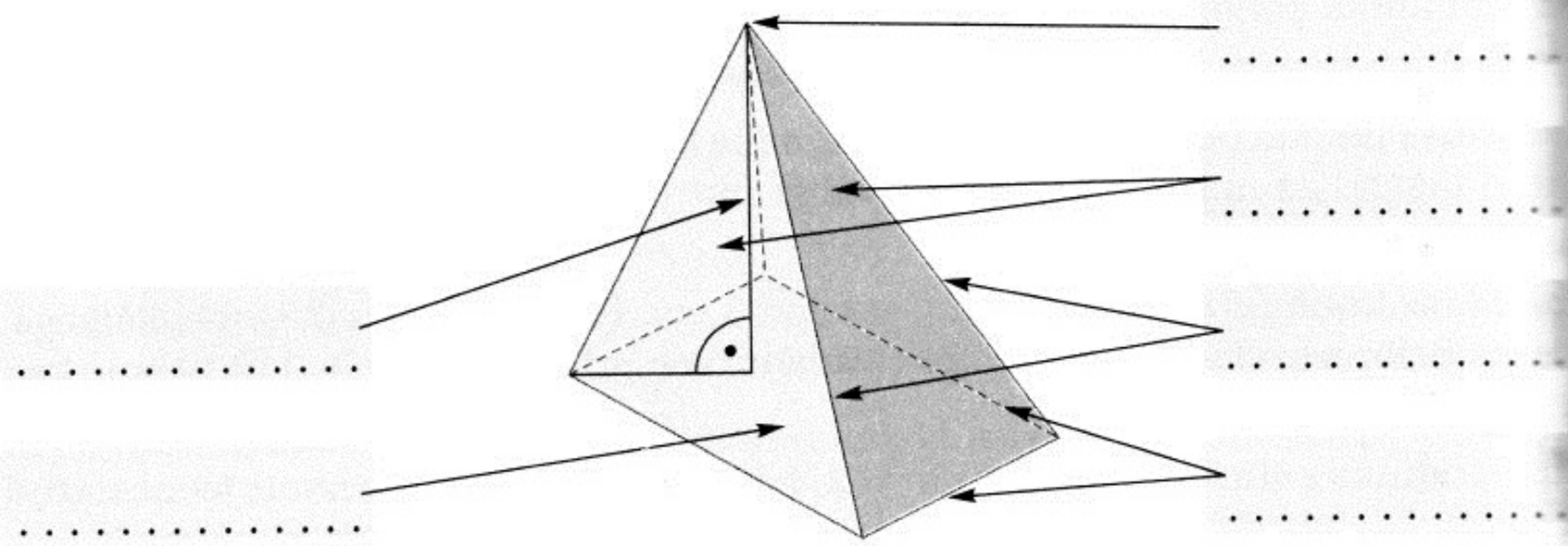
Vastused

1. $l = 10$ cm
2. $S_t = \frac{l^2}{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)$ üh^2; $V = \frac{\sqrt{2}l^3}{8}$ üh^3
3. $l = 18$ cm
4. $V = 60$ cm^3
5. $S = 0{,}25a\sqrt{4b^2 + 3a^2}$
6. $V = 18\sqrt{3}$ cm^3
7. $S_t \approx 28$ dm^2, $V = 8{,}2$ dm^3
8. $d = 9$ cm
9. 76° 46′ ehk 103°14′; 1,05 kg
10. $V = 7320$ cm^3
11. $V = 1008\sqrt{3}$ cm^3

16. PÜRAMIID

Täida lüngad.

1. **Püramiidiks** nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk on . . . . . ülejäänud tahud on . . . . . tipuga . . . . . .

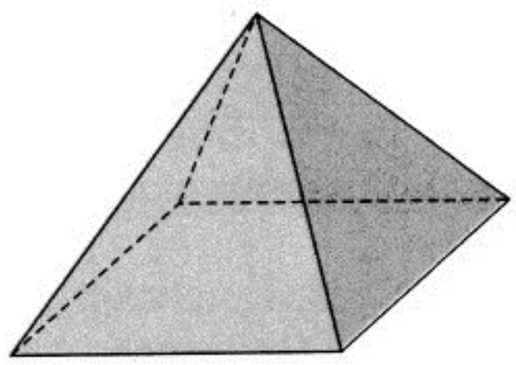


2. **Korrapäraseks püramiidiks** nimetatakse püramiidi, mille põhjaks on . . . . hulknurk ja kõrguse aluspunkt ühtib põhja keskpunktiga. Külgse . . . . . ., mistõttu külgtahud on võrdsed. . . . . kolm Külgtahu kõrgust, mis on tõmmatud püramiidi tipust, nimetatakse püramiidi . . . . . .

3. Põhiservade arvu järgi liigitatakse püramiidid kolmnurkseteks, nelinurkseteks, üld . . . .- nurkseteks.

4. Joonesta lisaks nelinurksele püramiidile kuusnurkne ja kolmnurkne püramiid.

Nelinurkne Kuusnurkne Kolmnurkne



5. **Külgpindala** $S_k = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n$

6. **Täispindala** $S_t = S_p + \ldots\ldots$

7. **Ruumala** $V = \frac{1}{3} \cdot \ldots\ldots$, kus H on püramiidi . . . . . .

8. Korrapärane püramiid

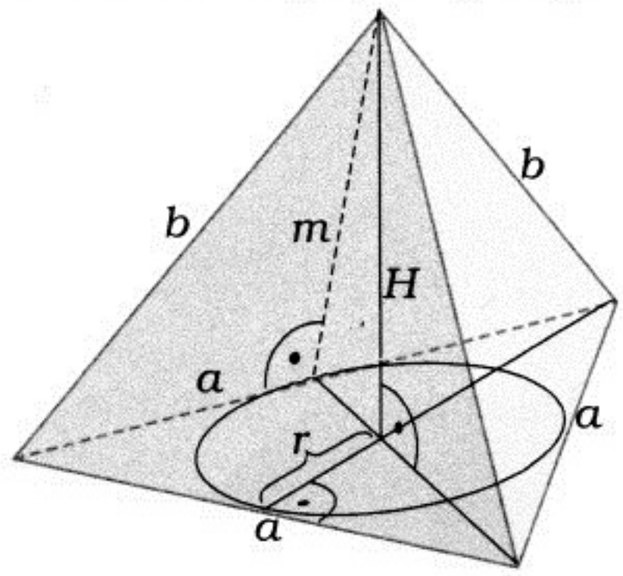
Püramiidi apoteem $m = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, kus a on põhiserv ja b on külgserv.

Külgpindala $S_k = 0{,}5nam = pm$, kus n on . . . . . ja p on pool põhja ümbermõõtu.

Põhjapindala $S_p = pr$, kus r on siseringjoone raadius ehk põhja apoteem.

Täispindala $S_t = S_p + \ldots\ldots$

Ruumala $V = \frac{1}{3} \cdot \ldots\ldots = \frac{1}{3} \cdot prH.$



9. Joonesta korrapärane nelinurkne püramiid. Näita joonisel püramiidi apoteem, põhja siseringjoone raadius (põhja apoteem) ja püramiidi kõrgus. Tähista vastavad lõigud ning kirjuta välja selle püramiidi jaoks külgpindala, põhjapindala, täispindala ja ruumala valem.

Vastus. $S_p = \ldots\ldots$ $S_k = \ldots\ldots$

$S_t = \ldots\ldots$ $V = \ldots\ldots$

10. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui külgpindala on 80 cm^2 ja põhjapindala on 64 cm^2.
Lisa joonisele vajalikud tähised.

Põhjapindalast saame põhiserva $a = \sqrt{64} = \ldots\ldots$

Külgpindalast saame püramiidi apoteemi $m = S_k : p$, millest $m = 80 : 16 = \ldots\ldots$, kus pool põhja ümbermõõtu $p = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 8 = \ldots\ldots$

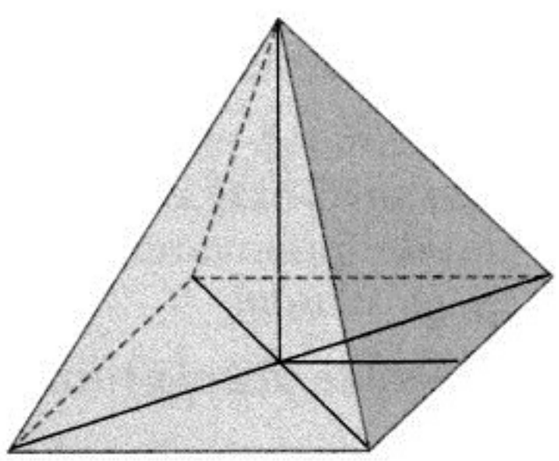
Põhja apoteem on pool põhiservast $r = \ldots\ldots$

Püramiidi kõrguse saame Pythagorase teoreemi kasutades.

$H^2 = \ldots\ldots = 5^2 - 4^2 = \ldots\ldots$

$H = \ldots\ldots$

Ruumala $V = \frac{1}{3} \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$



Vastus. Korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala on 64 cm^3.

11. Leia korrapärase kolmnurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus on 6 cm ja tahk moodustab põhitahuga nurga 60°.

Selgitav joonis.

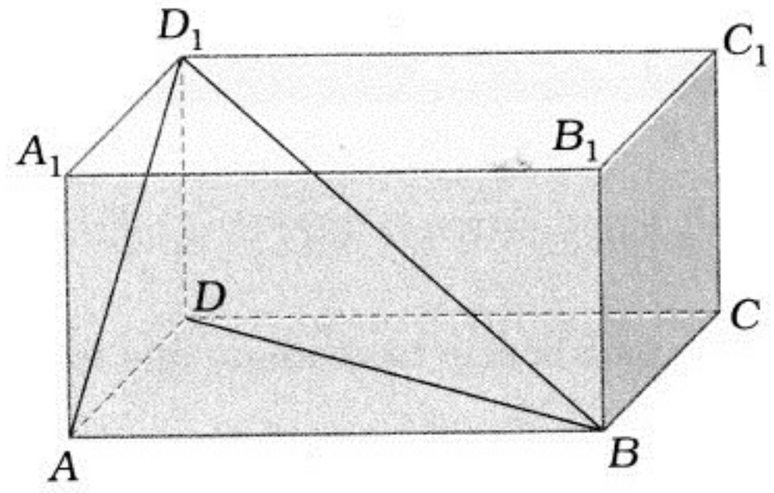
Lahendus.

Vastus. Korrapärase kolmnurkse püramiidi ruumala on $72\sqrt{3}$ cm^3.

HARJUTUSÜLESANDED

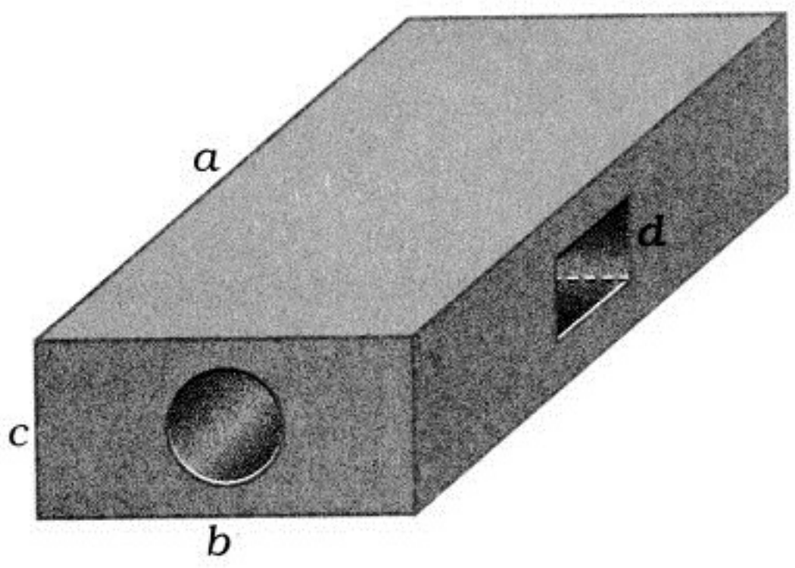
1. Leia korrapärase kolmnurkse püramiidi külgpindala, kui püramiidi kõrgus on 4 c ramiidi apoteem 8 cm.
2. *RE 1999* (15 p). Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja ümbermõõt on $120\sqrt{3}$ c põhja ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk on 30°. Arvuta selle püramiidi täis
3. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on a ja külgtahu tipunurk on 60°. Le miidi ruumala.
4. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 4 cm ja haar 8 cm. Kõ tahud moodustavad püramiidi põhjaga kahetahulised nurgad 60°. Leia püramiidi külgpindala.
5. Korrapärase püramiidi põhjaks on hulknurk, mille sisenurkade summa on 720°. püramiidi ruumala, kui on teada, et külgserv pikkusega l moodustab kõrgusega
6. *RE 1998* (15 p). Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserva ja põhja vahelise nu gens on 3 ning põhja diagonaal 8 cm. Püramiidi sisse on kujundatud korrapäran nurkne prisma nii, et selle alumine põhi asub püramiidi põhjal ja ülemise põhja külgtahkudel.
   a) Avalda prisma ruumala tema põhja diagonaali d kaudu.
   b) Millise d väärtuse korral on prisma ruumala maksimaalne? Arvuta prisma ma ne ruumala.

7. *RE 1999* (20 p). Püströöptahuka diagonaalid on 9 cm ja $\sqrt{33}$ cm, põhja ümbermõõt 18 cm ja külgserv 4 cm. Leia püströöptahuka ruumala ja kolmnurkse püramiidi $ABDD_1$ ruumala.

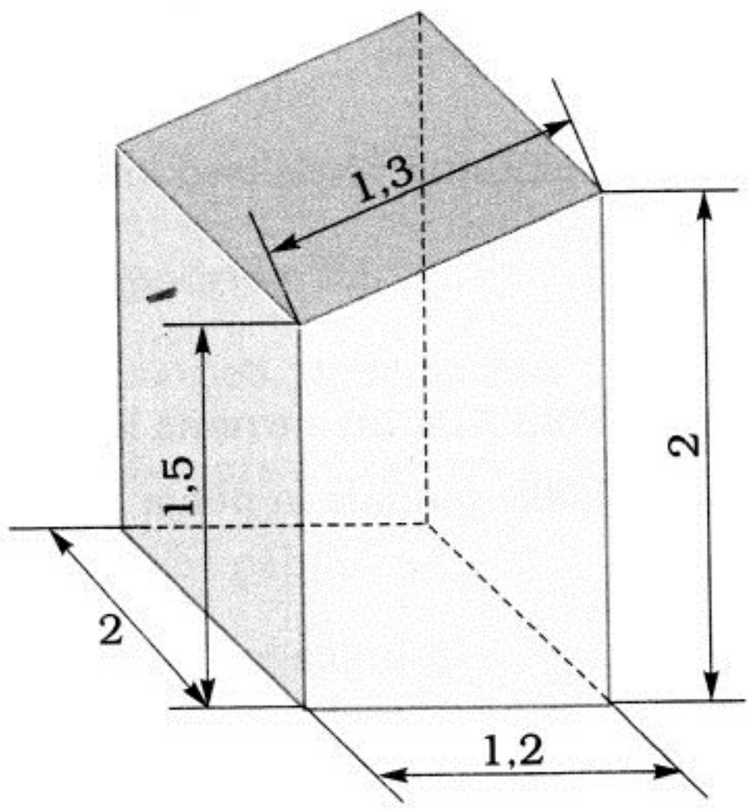


8. *RE 2002* (20 p). Risttahukakujulisest toorikust servadega a, b ja c valmistatakse detail. Esmalt puuritakse toorikust läbi ümmargune ava raadiusega r nii, et ava telg ühtib risttahuka sümmeetriateljega, mis on paralleelne külgservaga a. Seejärel tehakse ruudukujulise ristlõikega ava, mille sümmeetriatelg ühtib risttahuka selle sümmeetriateljega, mis on paralleelne külgservaga b. Ava ruudukujulise ristlõike külg on d, kusjuures $2r \leqslant d$.

   Avalda detaili välispinna pindala, ruumala ja õõnsuste pindala.



9. *RE 2003* (5 p). Maja seina vastu ehitatakse kilest kasvuhoone, mille esiseina kõrgus on 1,5 m ja tagaseina kõrgus on 2 m (vt joonist). Põhja mõõtmed on 1,2 m ja 2 m ning katuselati pikkus 1,3 m. Kui palju kulub kilet katuse, trapetsikujuliste külgseinte ja esiseina katmiseks?



10. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on H ja külgtahu tipunurk α. Leia külgpindala ja ruumala. Arvuta, kui $H = 5$ cm ja $\alpha = 60°$.

Vastused

1. $S_k = 288\ \text{cm}^2$
2. $S_t = 1200\left(2+\sqrt{3}\right)$ ruutühikut
3. $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{2}$ kuupühikut
4. $S_k = 8\sqrt{15}\ \text{cm}^2$
5. $V = \frac{3l^3}{16}$ üh^3
6. $V = 6d^2 - 0{,}75d^3$; $56\frac{8}{9}\ \text{cm}^3$
7. $V = 64\ \text{cm}^3$ ja $V = 10\frac{2}{3}\ \text{cm}^3$
8. $2\left(ab+ac+bc-d^2-\pi r^2\right)$;
   $abc - d^2b - \pi r^2(a-d)$;
   $2\pi r(a-d) + 4db - 2\pi r^2$
9. $10\ \text{m}^2$
10. $S_k = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $V = 83\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$

17. PÜRAMIIDI PÕHJAGA PARALLEELSE LÕIKE OMADUSI

Täida lüngad.

1. Kui lõigata püramiidi põhjaga paralleelse tasandiga, siis tasandi lõikumisel püramiidi tahkudega kehtivad järgmised seosed:

a) külgservad ja kõrgus jaotuvad . . . . . osadeks;

b) lõige on põhjaga . . . . . hulknurk;

c) lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad nagu vastavate püramiidide . . . . . ruudud.

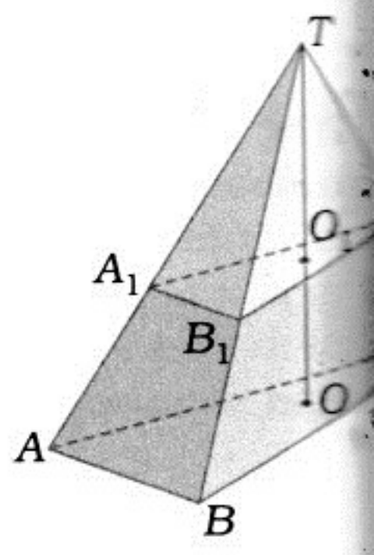
2. Püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasandiga jaguneb püramiid . . . . . .

Osa, mis jääb lõike ja põhja vahele, nimetatakse **tüvipüramiidiks**.

3. Vaatleme püramiidi $ABCT$. Lõikame püramiidi põhjaga paralleelse tasandiga, st $ABC \parallel A_1B_1C_1$. Püramiid jaguneb kaheks osaks, millest tüvipüramiid on. . . . . .

a) Tekkinud võrdelised lõigud on järgmised:

$$\frac{AT}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{B_1T} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{OT}{\ldots\ldots}$$



b) Põhi ABC on sarnane lõikega . . . . . .

c) Lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad järgmiselt:

$$\frac{S_{p_1}}{S_p} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}.$$

4. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külje pikkus on 5 cm. Kui suur on jast 2 cm kõrgusel tehtud paralleelse lõike pindala, kui püramiidi kõrgus on 8 cm?

5. Leia eelmises ülesandes tekkinud tüvipüramiidi ruumala.

18. PÖÖRDKEHAD. SILINDER

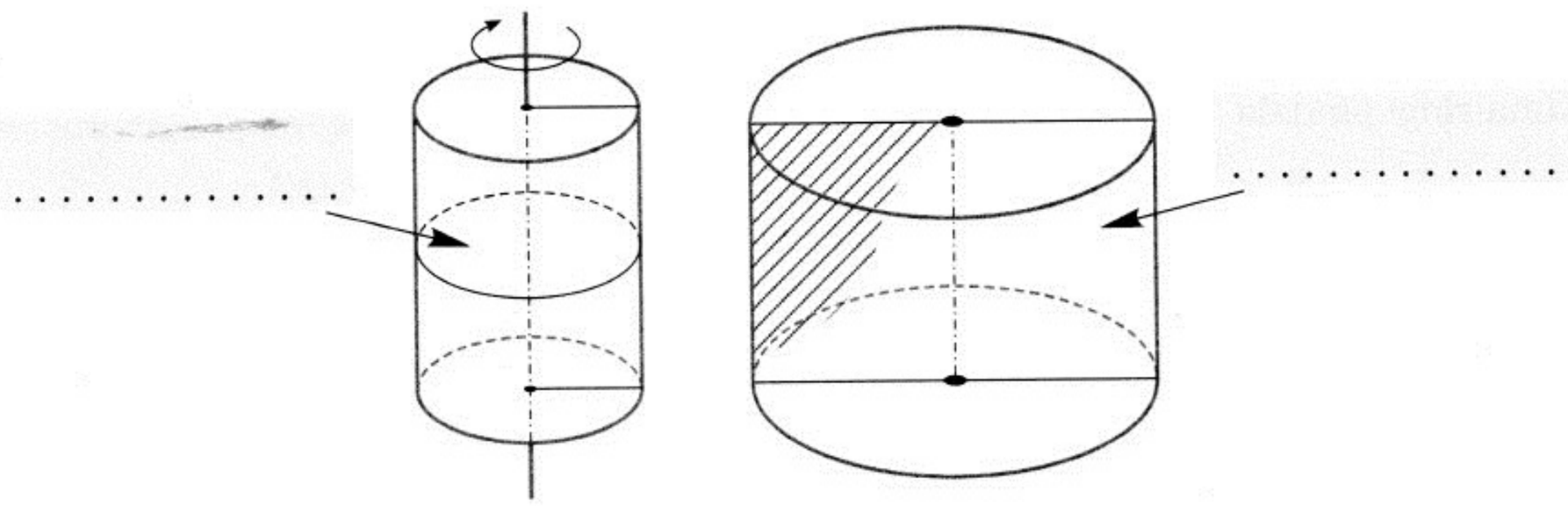
Täida lüngad.

1. **Pöördkehaks** nimetatakse keha, mis tekib tasandilise kujundi pöörlemisel mingi fikseeritud sirge nn . . . . . ümber. Pöördtelge nimetatakse ka **pöördkeha teljeks**.

Pöördkeha lõiget tasandiga, millel asub pöördkeha telg, nimetatakse . . . . . .

Lõiget tasandiga, mis on risti pöördteljega, nimetatakse . . . . . .

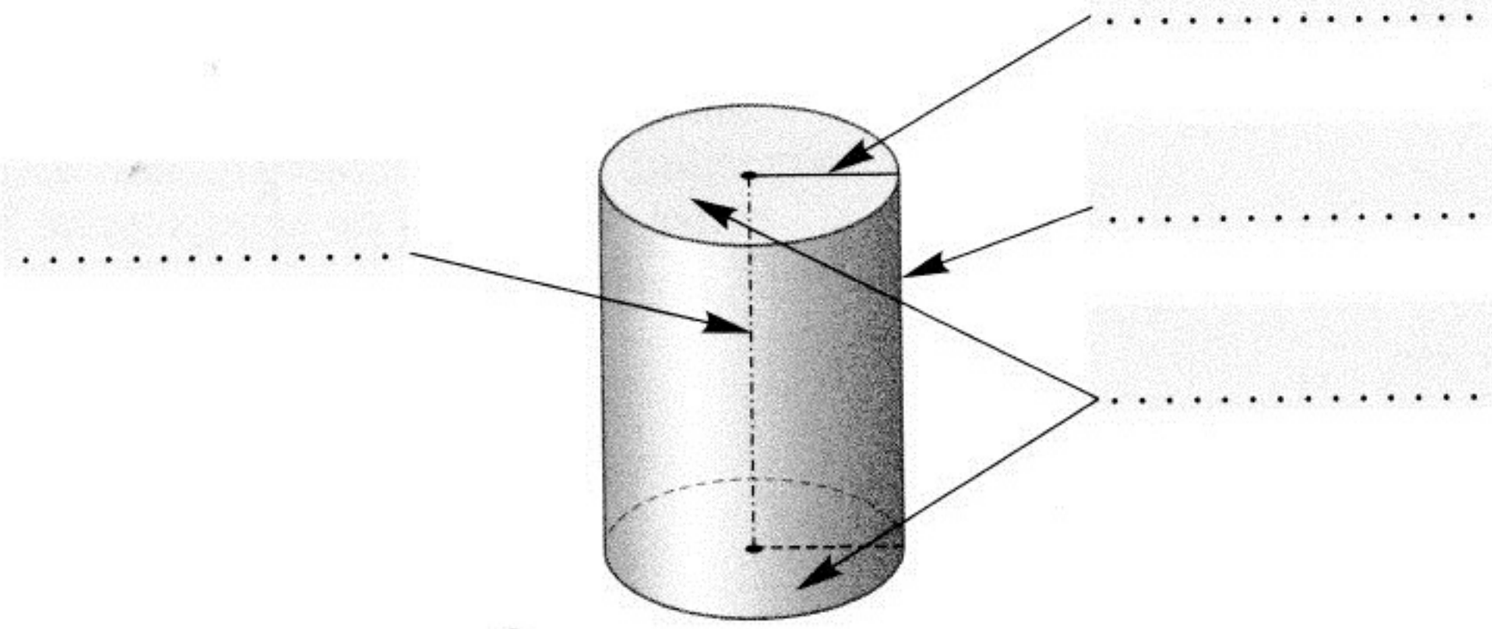
2. Viiruta joonistel ristlõige ja telglõige.



3. **Silinder on keha, mille moodustab ümber oma ühe külje pöörlev** . . . . . .

Ristküliku külge, mille ümber silindrit moodustav ristkülik pöörleb, nimetatakse . . . . Silindri telje vastas asetsev ristküliku külg on silindri . . . . . ., ristküliku kaks ülejäänud külge on silindri põhja. . . . . .

Seda osa silindri pinnast, mille kujundab moodustaja, nimetatakse silindri . . . . Silindri põhjade raadiused kujundavad ringid, mida nimetatakse silindri . . . . Silindri põhjadevahelist kaugust nimetatakse silindri . . . .

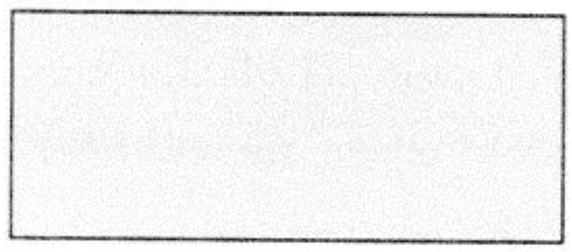


4. Külgpindala

$\mathbf{S_k} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{H}$, kus P on põhja ümbermõõt ehk $C = 2\pi r$ ja seega $\mathbf{S_k} = \ldots\ldots\ldots$

Silindri **külgpinnalaotuseks** on ....., mille üheks küljeks on
põhja ..... ja teiseks silindri .....

Kirjuta tähised silindri külgpinnalaotuse joonisele.



Täispindala $\mathbf{S_t} = \ldots\ldots + \mathbf{2} \cdot \ldots\ldots$

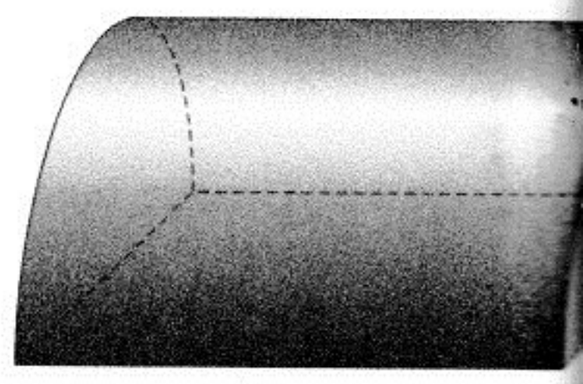
Kuna ringi pindala $S_p = \ldots\ldots$, siis

$$\mathbf{S_t} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{2\pi r}\left(\boldsymbol{H} + \ldots\ldots\right).$$

Ruumala $\boldsymbol{V} = \mathbf{S_p} \cdot \boldsymbol{H} = \ldots\ldots\ldots$

5. Poolsilindrikujulise kaarhalli põhja mõõtmed on 30 m ja 6 m. Leia põranda pindala rilise osa pindala ja halli ruumala.

Kanna joonisele vajalikud mõõdud.



Põrandaks on ristkülik mõõtmetega 30×6 m.
Järelikult on põranda pindala

$$S = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Silindrilise osa pindala on pool vastavast silindri külgpindalast ja lisaks kahe otsa pindalad, seega

$$S_{\text{sil}} = 0{,}5S_k + S_p = 0{,}5 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 30 + \pi \cdot 3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$$

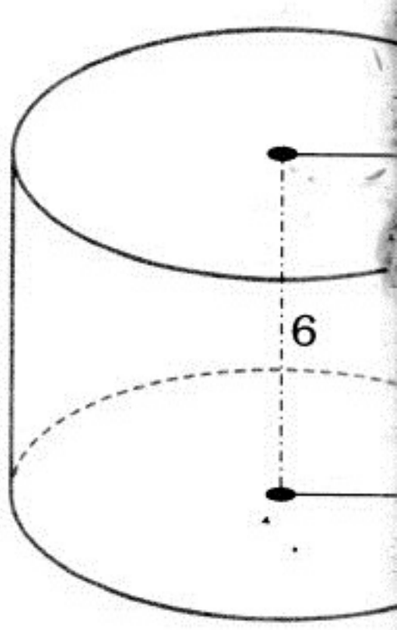
Siin poolsilindri 2 põhja pindala kokku on $S_p = \pi \cdot 3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Kaarhalli ruumalaks on samuti pool vastavast silindri ruumalast, seega

$$0{,}5V = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vastus. Poolsilindrikujulise kaarhalli põranda pindala on ....., silindrilise
pindala on $99\pi \approx \ldots\ldots$ m^2 ja kaarhalli ruumala $135\pi \approx \ldots\ldots\ldots$

6. Leia silindri täispindala ja ruumala.

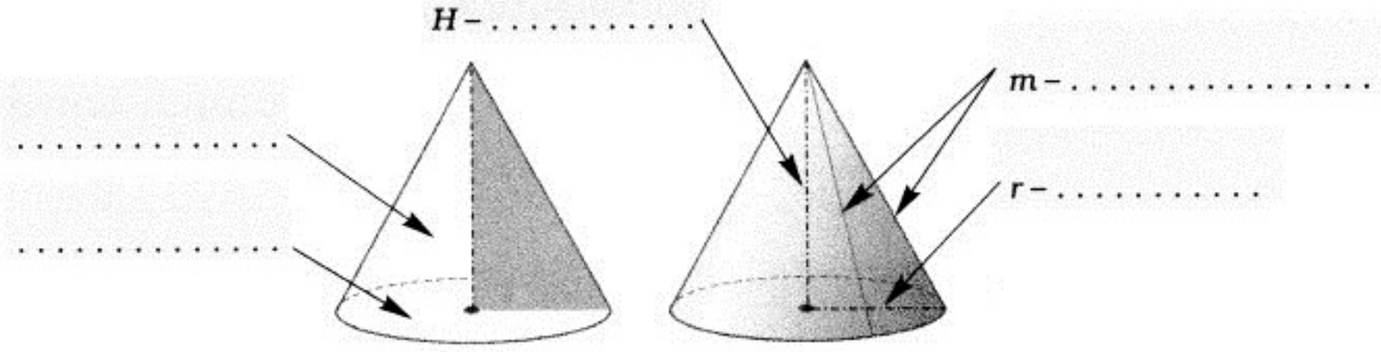


Vastus. $S_t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$V = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

19. KOONUS

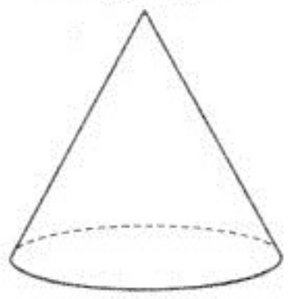
Täida lüngad.

1. **Koonus on keha, mille moodustab ühe oma** . . . . . **ümber pöörlev** . . . . . **kolmnurk.**



2. Viiruta koonuse **telglõige** ja joonesta koonuse **külgpinnalaotus**. Tähista koonuse kõrgus, moodustaja ja põhja raadius.

Telglõige



Külgpinnalaotus

3. **Külgpindala** S_k = ...

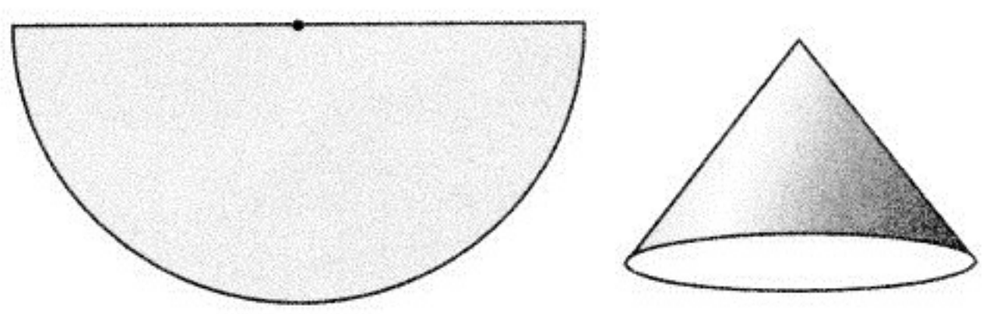
4. **Täispindala** $S_t = S_k + S_p$ = ...

5. **Ruumala** $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot H$ = ...

6. Poolring raadiusega 6 cm on keeratud koonuseks. Leia koonuse ruumala.

Lisa joonistele tähised.

Lõika paberist välja poolring ja keera see koonuseks. Veendu, et poolringi raadius on ühtlasi ka koonuse moodustaja.



Vastus. Ruumala on . . . . . $\pi \approx$ . . . . . cm^3.

7. Kui palju on vaja materjali koonusekujulise pabermütsi valmistamiseks, kui pea ümbermõõt on 56 cm ja mütsi kõrgus on 35 cm? Tee joonis.

Koonuse põhja ümbermõõt on $2\pi r = 56 \Rightarrow r =$ . . . . . .

Pythagorase teoreemi põhjal

$m = \sqrt{35^2 + \ldots\ldots} \approx$ . . . . . .

Koonuse külgpindala S_k = ...

Vastus. . . . . .

20. KERA

Täida lüngad.

1. **Kera on keha, mis tekib** . . . . . **pöörlemisel ümber oma diameetr**

piirav pind on . . . . . Sfäär on kõigi ühest kindlast punktist antud kau

asetsevate . . . . . hulk ruumis. Seda kindlat punkti nimetatakse sfä

kera . . . . . ja lõiku, mis ühendab keskpunkti sfääri mingi punk

sfääri ja kera . . . . . Sfääri kaht punkti ühendavat lõiku, mis läbi

. . . . . , nimetatakse kera . . . . . (*d* = ...

2. Tasandit, millel on kera pinnaga . . . . . ühine punkt, nimet

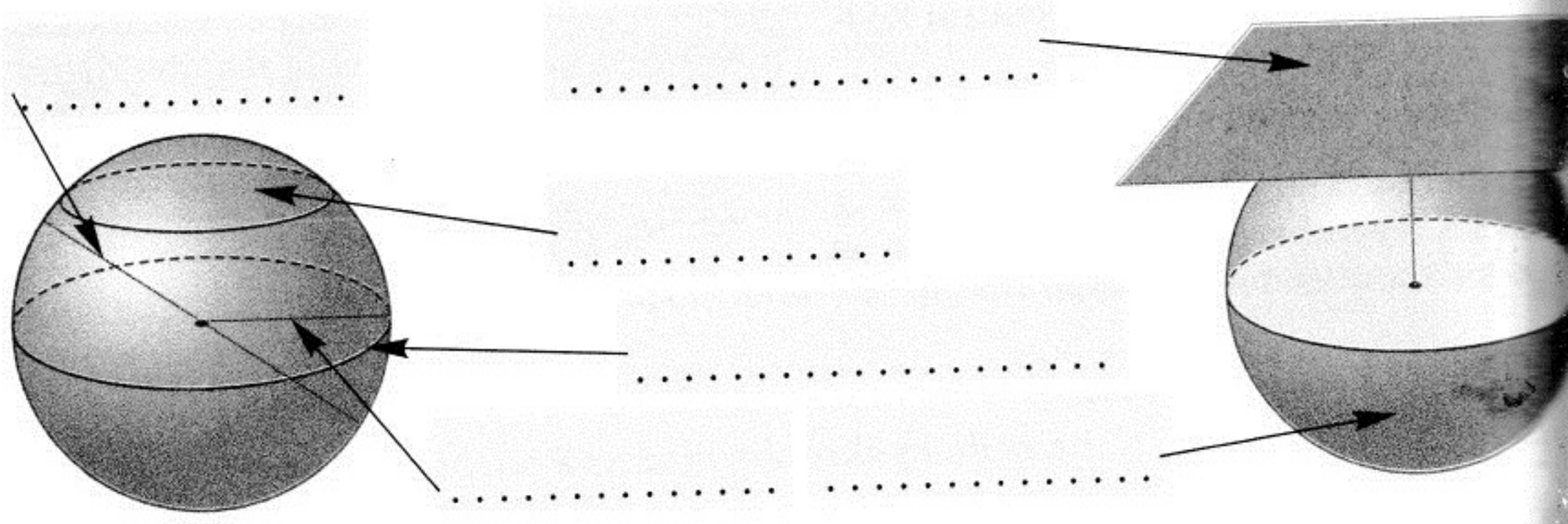
. . . . . Kera puutujatasand on . . . . . punkt

tõmmatud raadiusega.

3. Kera iga tasapinnaline lõige on . . . . . Kui lõiketasand läbib kera keskpunk

lõikeringi raadiuseks on kera . . . . . ning lõiget nimetatak

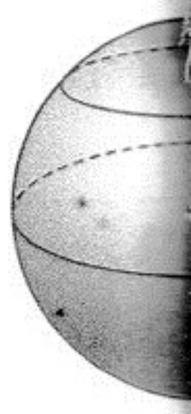
. . . . . , vastavat lõikejoont aga . . . . . .



4. **Pindala S** = ... , kus *R* on . . . . . .

5. **Ruumala** $V = \frac{4}{3} \cdot$ . . . . . .

6. Kera, mille raadius on 41 dm, on lõigatud tasandiga 9 dm kaugusel kera keskpunk
Arvuta lõike pindala.



Täienda joonist ja märgi vajalikud suurused joonisele.

Näpunäide. Lõike raadiuse saad Pythagorase teoreemi kasutades.

$$r = \sqrt{41^2 - 9^2} = \text{. . . . . .}$$

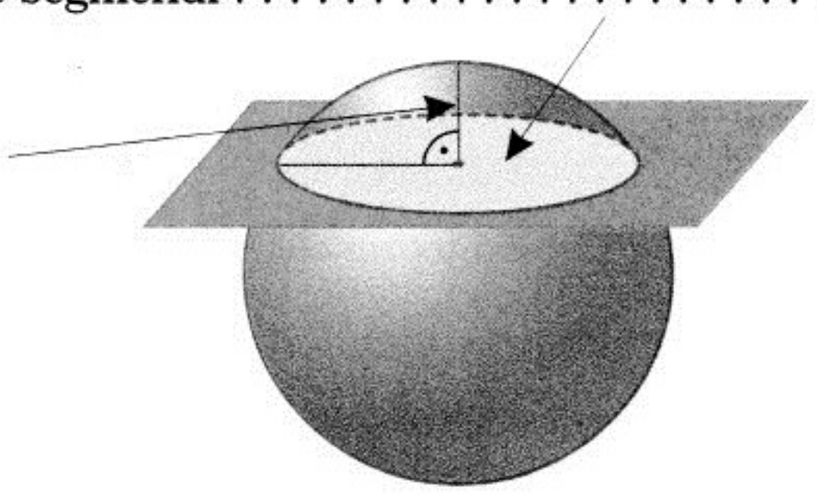
Vastus. Lõike pindala on $S_l = 16\pi \text{ m}^2$.

21. KERA OSAD

Täida lüngad.

1. Kera lõikamisel tasandiga jaotub kera osadeks, mida nimetatakse kera **segmentideks**.

2. Lõiketasandi ja kera ühisosa nimetatakse segmendi . . . . . ja põhja keskpunktist sfäärini ulatuvat ristlõiku segmendi . . . .



3. Segmendi pindala ja ruumala valem.

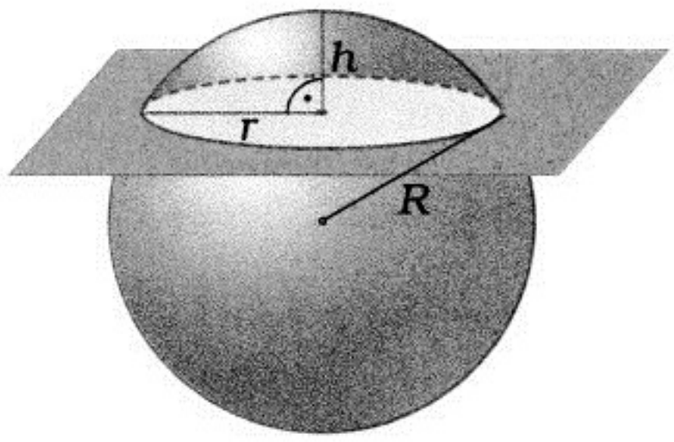
$S = S_p + S_k = \pi r^2 + 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + 2Rh\right)$

$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

R on . . . . . .

r on . . . . . .

h on . . . . . .

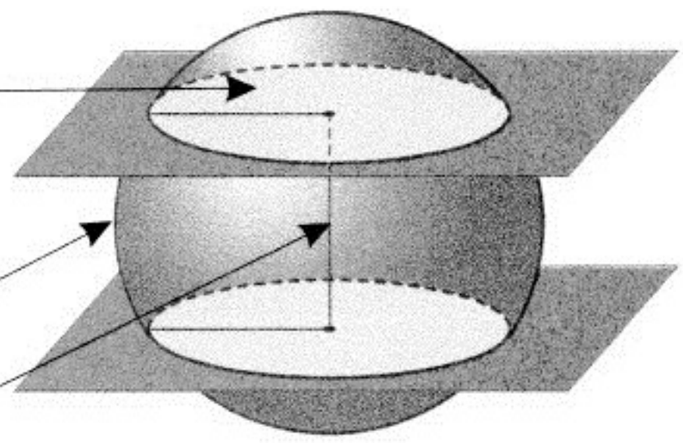


4. Kera lõikamisel kahe paralleelse tasandiga jaotub kera kolmeks osaks: kaheks segmendiks ja kahe tasandi vahele jäävaks kera **kihiks**.

Kera kihti piiravaid ringe nimetatakse kihi . . . . . .

Kahe tasandi vahele jäävat kera pinna osa nimetatakse sfääri . . . . . .

Kera kihi põhjade vahelist kaugust nimetatakse kihi . . . . . .



5. Kihi pindala (sfääri vöö ning lõikepinnad) ja ruumala.

$S_{vöö} = 2\pi Rh$

$V = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$

$S = S_{vöö} + S_1 + S_2$

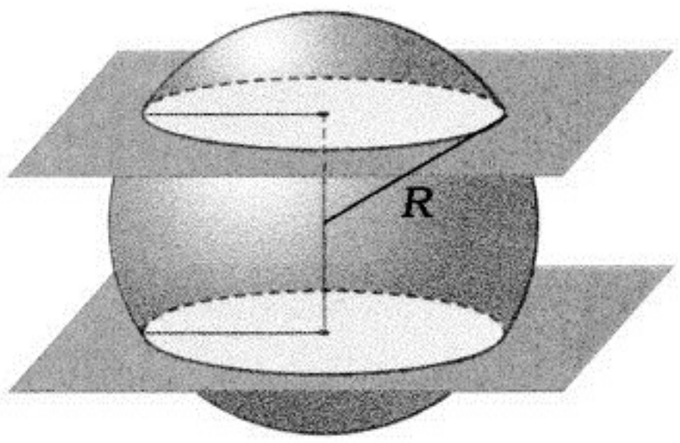
R on . . . . . .

h on . . . . . .

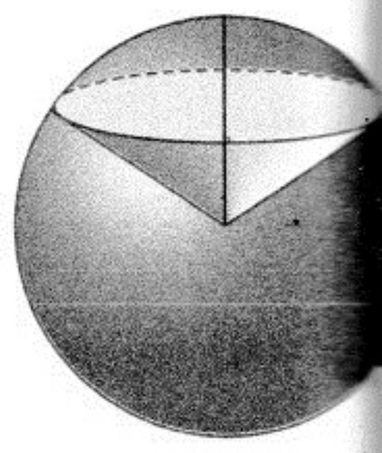
r_1 ja r_2 on . . . . . .

S_1 ja S_2 on . . . . . .

Märgi valemite tähised joonisele.



6. Kui kera segment ühendada segmendi põhja ja kera keskpunktiga määratud koo saame kera **sektori**.



Sektori pindala ja ruumala.

$S = \pi R(2h + r)$

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

R on . . . . . .

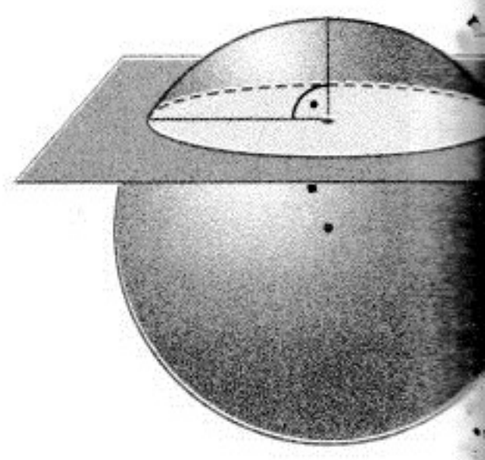
h on . . . . . .

r on . . . . . .

Märgi valemite tähised joonisele.

7. Kera segmendi põhja pindala on 36π cm^2 ja külgpindala 40π cm^2. Leia kera pinda ruumala.

Kanna joonisele vajalikud tähised.



Segmendi põhja pindala on 36π cm^2. Seega

$r =$ . . . . . cm.

Külgpindala on 40π cm^2. Seega $Rh =$ . . . . . .

Pythagorase teoreemi põhjal $(R-h)^2 + 6^2 =$ . . . .

Saame võrrandisüsteemi

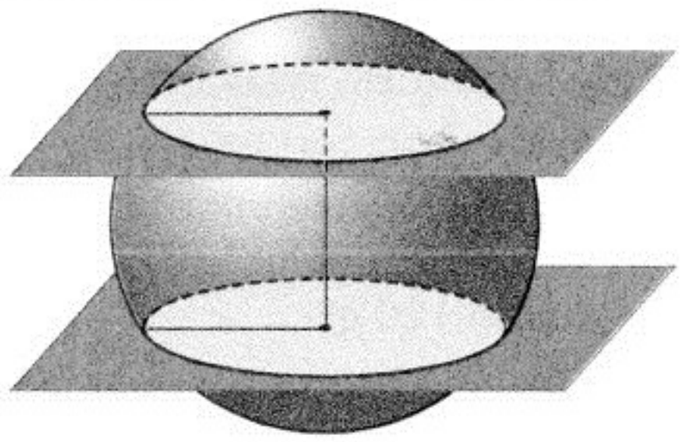
$$\begin{cases} Rh = \ldots\ldots\ldots \\ (R-h)^2 + 36 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 2 \\ R = 10 \end{cases}$$

Kera pindala on . . . . . ja ruumala . . . . . .

8. Kera raadius on 10 cm ning kihtide raadius on vastavalt 6 cm ja 8 cm. Leia kera kihi pindala ja ruumala.

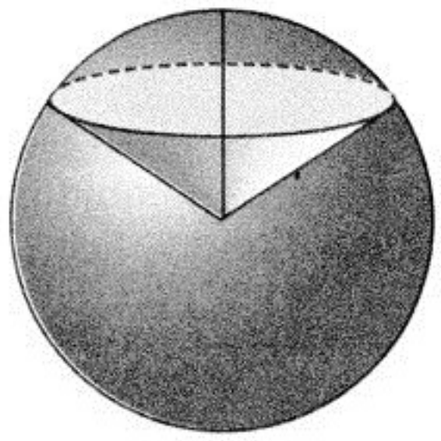
Tähista vajalikud suurused ja kanna andmed joonisele.



Vastus. . . . . .

9. Leia kera sektori ruumala, kui kera raadius on 20 cm ning segmendi ja koonuse ühise põhja raadius on 12 cm.

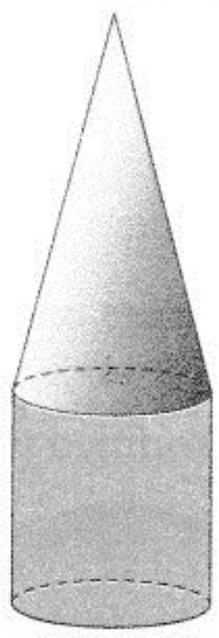
Tähista vajalikud suurused ja kanna andmed joonisele.



Vastus. . . . . .

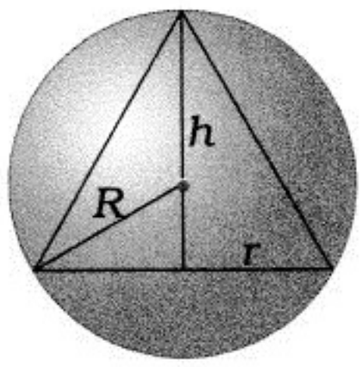
22. STEREOMEETRIA HARJUTUSÜLESAN

1. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, mille ümbermõõt on 36 cm. Arvuta koonuse ruumala.
2. Kassitoidu Emmi Rõõm silindrikujulise konservikarbi kõrgus on 3,5 cm ja põhja ümbermõõt on 25 cm. Kui palju kaalub selles karbis olev toit, kui 100 cm^3 konservi kaalub 120 g?
3. Plekist on tarvis valmistada koonusekujuline nõu ruumalaga 1 liiter. Milline peaks olema koonuse põhja raadius, kui koonuse kõrguseks võtta 15 cm?
4. Torni koonusekujulise katuse kõrgus on 17 m ja põhja läbimõõt 9 m. Mitu kilogram kulub selle katuse värvimiseks, kui 1 dm^2 värvimiseks kulub 2 g värvi?

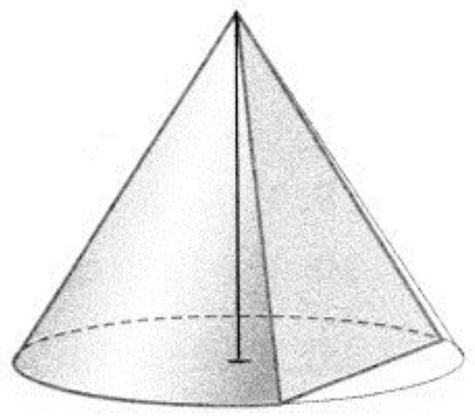


5. *RE 2002* (5 p). Koonusekujulise liivahunniku põhja läbimõõt on 0,90 m ja moodus 0,75 m. Mitu kilogrammi liiva on selles kuhjas, kui 1 m^3 liiva mass on 1,8 t?
6. *RE 1998* (15 p). Koonuse tipp asub punktis $T(0; 0; 8)$, punkt $A(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 16)$ paikn ümberringjoonel ja põhja raadius on 8 cm. Leia koonuse täispindala. Kui kaugele t tuleb teha põhjaga paralleelne lõige, mille pindala on veerand põhja pindalast?
7. Koonuse tipp asub koordinaatide alguspunktis ja põhi on risti y-teljega. Punkt $A(3\sqrt{3}; 3; 0)$ asub põhja ümberringjoonel. Leia koonuse telglõike tipunurk, koonus pindala ja ruumala. Mitu protsenti moodustab koonuse põhja pindala külgpindala
8. *RE 2002* (5 p). Kaaneta silindrikujulise anuma telglõige on ruut, mille diagonaal on Mitu kilogrammi värvi kulub selle anuma välispinna värvimiseks, kui värvikulu 1 m ta on 240 g?
9. Trapets, mille alused on 4 cm ja 9 cm ning haarad on 3 cm ja 4 cm, pöörleb ümber ma aluse. Leia tekkiva pöördkeha ruumala ja pindala.
10. Võrdhaarne kolmnurk haaraga 8 cm ja alusnurgaga $30°$ pöörleb ümber ühe haara tekkinud pöördkeha ruumala ja pindala.
11. Romb, mille külg on a ja üks nurkadest $30°$, pöörleb selle külje ümber. Avalda pöö pindala ja ruumala.
12. *RE 2004* (5 p). 50-liitrise silindrikujulise anuma läbimõõt on 3,4 dm. Leia sama läb duga, kuid kaks korda vähem mahutava silindrikujulise anuma kõrgus täpsusega
13. Kera on lõigatud tasandiga, mis asetseb kera keskpunktist 5 dm kaugusel. Arvuta pindala, kui lõikeringi pindala on 150π dm^2.
14. Kerasse raadiusega 6 cm on kujundatud koonus, mille telglõike tipunurk on $60°$. L ruumala ja koonuse ruumala vahe.

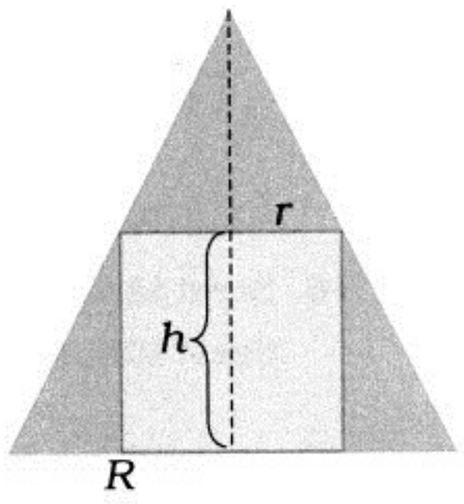
15. Koonuse telglõike tipunurk on 90° ja põhja raadius on r. Leia koonuse sisse kujundatud kera ruumala.
16. Kui palju materjali kulub 10 koera mängupalli valmistamiseks, kui palli läbimõõt on 15 cm?
17. Koonusesse, mille moodustaja on kaks korda pikem põhja raadiusest, on joonestatud kera. Leia koonuse ruumala ja kera ruumala suhe.
18. Silindri telglõige ja põhi on pindvõrdsed. Avalda silindri täispindala, kui silindri kõrgus on h.
19. Korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv on 3 cm ja külgserv 8 cm. Arvuta prisma ümber kujundatud kera raadius (prisma tipud asuvad kera pinnal).
20. Kolmnurkse korrapärase püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga 60° ja apoteem on 12 cm. Leia püramiidi täispindala ja ruumala.
21. *RE 1999* (15 p). Koonuse telglõike tipunurk on 64° ja põhja ümbermõõt 126 cm. Arvuta selle koonuse külgpindala ja ruumala.
22. *RE 2002* (5 p). Torni koonusekujulise katuse läbimõõt, mõõdetuna kõige laiemast kohast, on 8,0 m ja kõrgus 4,2 m. Mitu kilogrammi värvi tuleks osta torni katuse värvimiseks, kui ühe ruutmeetri värvimiseks kulub 200 g värvi?
23. *RE 2002* (20 p). On antud kera ruumalaga 36π cm^3. Kera sisse on kujundatud koonus.
    a) Leia kera raadius R.
    b) Avalda koonuse põhja raadius r kõrguse h kaudu.
    c) Avalda koonuse ruumala kõrguse h kaudu.
    d) Kui suur peab olema koonuse kõrgus h, et koonuse ruumala oleks maksimaalne?



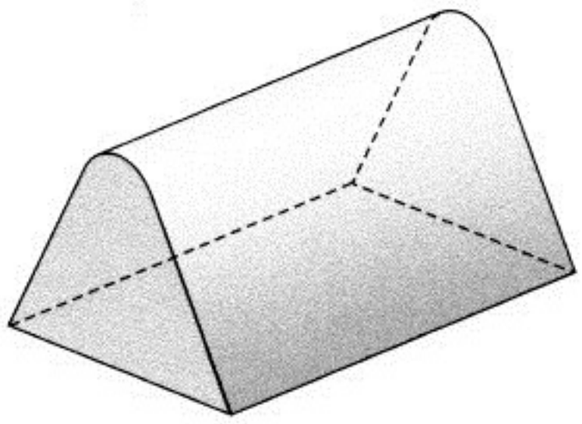
24. *RE 2002* (20 p). Koonuse tippu läbiv tasand lõikab koonuse põhja mööda kõõlu, mille pikkus on võrdne raadiusega. Leia tekkinud koonuse osade ruumalade suhe.



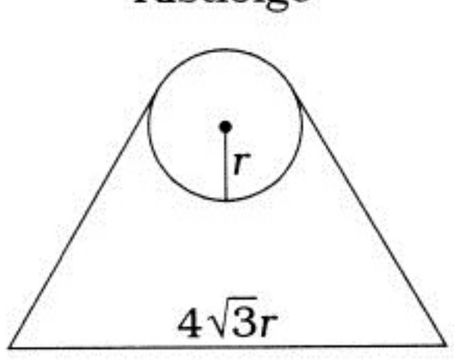
25. *RE 2002* (20 p). Antud on koonus, mille kõrgus on 15 cm ja ruumala 180π cm^3. Koonuse sisse on kujundatud silinder.
    a) Leia koonuse põhja raadius R.
    b) Avalda silindri kõrgus h tema põhja raadiuse r kaudu.
    c) Avalda silindri ruumala tema põhja raadiuse r kaudu.
    d) Kui suur peab olema silindri põhja raadius, et silindri ruumala oleks maksimaalne?



26. *RE 2003* (20 p). Varikatuse ristlõige (vt jooniseid) on saadud võrdkülgsest kolmnurgast selle ühe nurga ümardamisel ringjoone kaarega, mille raadius on r. Sealjuures on kolmnurga kaks külge ringjoone puutujateks. Varikatuse laius ja pikkus (mõõdetuna maapinnal) on vastavalt $4\sqrt{3}r$ ja b. Leia varikatuse pindala S, katusealuse ruumala V ja kõrgus h.



Ristlõige



27. *RE 2004* (20 p). Lillepott on korrapärane kaheksanurkne prisma, mille õõnsus on p (vt joonist). Sealjuures

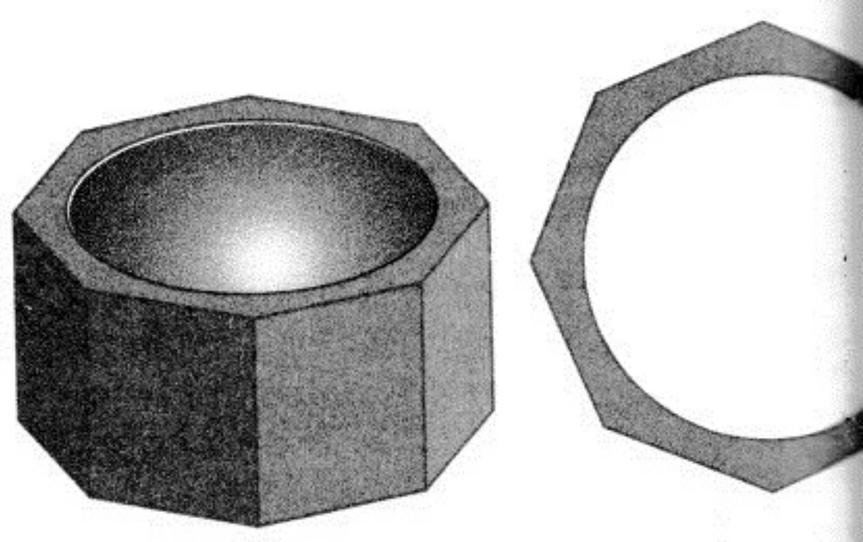
a) poolkera suurringi tasand ühtib prisma ülemise põhja tasandiga,

b) poolkera sümmeetriatelg ja prisma sümmeetriatelg ühtivad,

c) poolkera ruumala on pool prisma ruumalast,

d) lillepoti põhja paksus (kõige õhemas kohas) võrdub külgseina paksusega (kõig mas kohas).

1) Avaldage poolkerakujulise õõnsuse ruumala prisma põhiserva pikkuse a kaudu.
2) Milline peaks olema a väärtus täissentimeetrites, et õõnsuse maht oleks vähemalt 0,5 liitrit?



Vastused

1. $72\sqrt{3}\pi$
2. ≈ 209 g
3. $\approx 8{,}0$ cm
4. ≈ 50 kg
5. ≈ 230 kg
6. $S_t = 144\pi$ cm^2; 3 cm
7. $\alpha = 120°$; $S_t = 9\pi\left(2\sqrt{3}+3\right)$ üh^2 ja $V = 27\pi$ üh^3; 86,6%
8. 0,68 kg
9. $V = 32{,}64\pi$ cm^3 ja $S = 36\pi$ cm^2
10. $V = 128\pi$ cm^3 ja $S = 32\pi\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm^2
11. $S = 2\pi a^2$ üh^2, $V = 0{,}25\pi a^3$ üh^3
12. 2,8 dm
13. $S = 700\pi$ dm^2
14. 207π cm^3
15. $V = \frac{1}{3}\cdot 4\pi r^3\left(\sqrt{2}-1\right)^3$
16. Seest täis pallide korral 18 dm^3
    Seest tühjade pallide korral 0,71 m^2
17. 2,25
18. $4h^2\left(\frac{2}{\pi}+1\right)$
19. $\sqrt{19}$ cm
20. $S_t = 324\sqrt{3}$ cm^2 ja $V = 648$ cm^3
21. ≈ 2380 cm^2 ja 13 500 cm^3
22. 15 kg
23. $R = 3$ cm; $r = \sqrt{6h-h^2}$; $V = \frac{1}{3}\pi h^2(6-h)$;
24. $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$
25. $R = 6$; $h = 15-2{,}5r$; $V(r) = \pi\left(15r^2-2{,}5r^3\right)$
26. $S = 2\left(3\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)br$; $V = \left(11\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)br^2$; $h =$
27. $\frac{1}{2}a^3\cot^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)a^3$; vähemalt 6 c

23. FUNKTSIOONI TULETIS. KORDAMINE

Täida lüngad.

1. **Funktsiooni tuletiseks** kohal x nimetatakse funktsiooni . . . . . ja argumendi muudu . . . . . piirväärtust, kui argumendi muut läheneb nullile.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ ehk } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse . . . . Kui funktsioonil on olemas tuletis kohal x, siis nimetatakse funktsiooni **diferentseeruvaks sellel kohal**.

3. Täida tabel.

$c' =$	$\left(a^x\right)' =$	$(\sin x)' =$
$x' =$	$(\ln x)' =$	$(\cos x)' =$
$\left(\frac{1}{x}\right)' =$	$(\log_a x)' =$	$(\tan x)' =$
$\left(\sqrt{x}\right)' =$	$\left(x^n\right)' =$	$\left(e^x\right)' =$

4. **Liitfunktsiooni tuletis** võrdub välimise funktsiooni tuletise ja sisemise funktsiooni tuletise . . . . $F'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$, kus $u = g(x)$

5. **Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis**

a) $(u+v)' =$ . . . . . c) $(c \cdot u)' =$ . . . . . e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - \ldots\ldots\ldots}{v^2}$

b) $(u-v)' =$ . . . . . d) $(u \cdot v)' =$ . . . . . + ...

6. Leia tuletis (kui võimalik, lihtsusta enne funktsiooni avaldist).

a) $y = 8x - 7x^2$ $y' =$ b) $y = e^{-3}$ $y' =$ c) $y = 3^x + \ln x$ $y' =$

d) $y = \frac{x+1}{x}$ $y' =$

e) $y = \frac{2x+3}{x^2}$ $y' =$

f) $y = \sqrt[13]{x^8}$ $y' =$

g) $y = \left(\sqrt{x} + 2x\right)^2$ $y' =$

h) $y = 2^x \cdot \tan x$ $y' =$

i) $y = \frac{1+\sin x}{\sin x}$ $y' =$

j) $y = \frac{2x+3}{x^2-4}$ $y' =$

24. ALGFUNKTSIOON MÄÄRAMATA INTEGRAAL

Täida lüngad.

1. Funktsiooni $y = F(x)$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ . . . . . piirkonnas X, kui selles piirkonnas $F'(x) = f(x)$.

2. Funktsiooni

a) $y = 5x^4$ algfunktsioon on . . . . . ;

b) $y = \sin x$ algfunktsioon on . . . . . ;

c) $y = \frac{1}{x}$ algfunktsioon on . . . .

3. **Funktsiooni algfunktsiooni leidmist nimetatakse integreerimiseks** ja see on tu

leidmise . . . .

4. Kui funktsioonil $y = f(x)$ on olemas algfunktsioon $y = F(x)$, siis on sellel lõpmata p

algfunktsioone $y = G(x)$, mis kõik avalduvad kujul $G(x) = F(x) + C$, kus C on . . . .

. . . . . Funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$ ni

takse funktsiooni $y = f(x)$ **määramata integraaliks** ja tähistatakse sümboliga $\int f($

$\int f(x)dx = F(x) + C$, kus $F'(x) = f(x)$

Integraali märk . . . . . .

Integraalialune avaldis . . . . . .

Integreeritav funktsioon . . . . . .

Integreerimismuutuja . . . . . .

Suvaline konstant . . . . . .

5. Funktsiooni $y = 3x^2 - 2x$ algfunktsioon on $y = x^3 - x^2 + 2$, sest . . . . . .

6. Leia igale funktsioonile 2 algfunktsiooni.

a) $y = x^2 - 7$ . . . . . .

b) $y = \cos x$ . . . . . .

c) $y = 4x^3 - x + 7$ . . . . . .

d) $y = \frac{2}{x^3}$ . . . . . .

e) $y = \pi$ . . . . . .

f) $y = x^4 - 5x^3 - 3x$ . . . . . .

g) $y = 2\sqrt{x}$ . . . . . .

25. INTEGRAALI OMADUSED JA PÕHIVALEMID

Täida lüngad.

1. Integraali omadused

1. omadus

Summa (vahe) integraal võrdub liidetavate integraalide . . . . . .

. . . . . .

$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$\int (\sin x + \cos x)dx = \int \sin x dx + \int$ . . . . . .

2. omadus

Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali . . . .

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

$\int 3x^4 dx = 3\int$ . . . . . .

2. Täida tabel.

$\int 0dx =$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{\ldots\ldots} + C$	$\int \sin x dx = -\ldots\ldots\ldots$
$\int dx =$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots\sqrt{x} + C$	$\int \cos x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{\ldots\ldots\ldots} + C, n \neq -1$	$\int e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert\ldots\ldots\rvert + C$	$\int a^x dx = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ln a} + C$	

3. Leia määramata integraal (kui vaja, lihtsusta avaldist).

1. $\int \frac{dx}{-3x} =$
2. $\int (-2)dx =$
3. $\int 9x^5 dx =$
4. $\int (2\pi - t)dt =$
5. $\int \frac{t^3 - 8}{2 - t} dt =$
6. $\int 1961e^x dx =$
7. $\int x^{-3} dx =$
8. $\int \frac{8x^2 - 2x - 1}{4x + 1} dx =$
9. $\int \left(5^x - \cos x\right)dx =$
10. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx =$

26. INTEGREERIMINE MUUTUJAVAHETUSE

1. $\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right] \cdot g'(t)dt$, **kui** $x = g(t)$

a) $\int \sin(9x+5)dx$

$t = 9x+5$

$dt = (9x+5)'dx = 9dx$

$dx = \frac{dt}{9}$

$\int \sin(9x+5)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{9}dt = \frac{1}{9}\int \sin t dt = -\frac{1}{9}\cos t + C = -\frac{1}{9}\cos$ . . . . . .

b) $\int (11x-2)^3 dx$

$t = 11x-2$

$dt = (11x-2)'dx = 11dx$

$dx = \frac{dt}{11}$

$\int (11x-2)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{11}dt = \frac{1}{11}\int t^3 dt = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^{\cdots\cdots}}{\cdots\cdots} + C =$ . . . . . .

c) $\int \frac{x\,dx}{x^2+2}$

$t = x^2+2 \Rightarrow x = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$dt = \left(x^2+2\right)'dx = 2x\,dx$

$dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t-2}}$

$\int \frac{x\ dx}{x^2+2} = \int \frac{\sqrt{t-2}\ dt}{2\sqrt{t-2}\cdot t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln$ . . . . . = ...

2. Integreeri.

1. $\int \frac{x^3-64}{4-x}dx =$
2. $\int \cos(2x+1)dx =$
3. $\int 2^{x+3}dx =$
4. $\int \left(x+\sqrt{x}\right)^2 dx =$
5. $\int \left(\frac{e}{x}+\frac{x}{e}\right)^2 dx =$
6. $\int \frac{x^3-4}{x^4}dx =$
7. $\int \left(\frac{6}{t}+t^2\right)dt =$
8. $\int \frac{2x^2+10x+12}{x+3}dx =$

Vastused

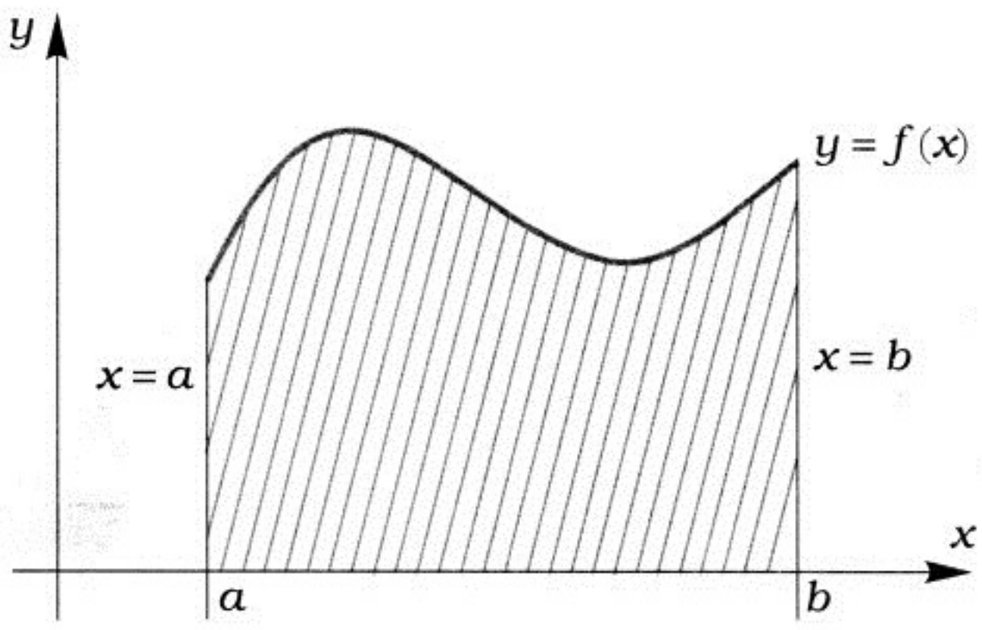
$-\frac{x^3}{3}-2x^2-16x+C;\ \frac{1}{2}\sin(2x+1)+C;\ \frac{2^{x+3}}{\ln 2}+C;\ \frac{x^3}{3}+\frac{4x^2\sqrt{x}}{5}+\frac{x^2}{2}+C;$

$-\frac{e^2}{x}+2x+\frac{x^3}{3e^2}+C;\ \ln|x|+\frac{4}{3x^3}+C;\ 6\ln|t|+\frac{t^3}{3}+C;\ x^2+4x+C$

27. KÕVERTRAPETSI PINDALA MÄÄRATUD INTEGRAAL

Täida lüngad.

1. Täisnurkse trapetsi pikema haara asendamisel kõverjoonega $y = f(x) \geqslant 0$ tekib kujund, mida nimetatakse **kõvertrapetsiks**. Seega on kõvertrapets kujund, mis on piiratud . . . . -teljega, vertikaalsete sirgetega . . . . . ja . . . . . ning funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga.



2. Kui võtame argumendi väärtuse $x \in [a; b]$, saame lõigule $[a; x]$ vastava kõvertrapetsi, mille pindala on muutuja x funktsioon $S(x)$. Osutub, et $S'(x) = f(x)$. Siis kogu **kõvertrapetsi pindala** S avaldub kujul $S = F(b) - F(a)$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon.

Avaldist $F(b) - F(a)$ märgitakse sümboliga $\int_a^b f(x)dx$ ja nimetatakse funktsiooni $f(x)$ . . . . . integraaliks rajades . . . .

Arvu a nimetatakse . . . . . ja arvu b . . . .

Seega $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x).$$

Selle valemiga, mida nimetatakse **Newtoni-Leibnizi valemiks**, on määratud integraal defineeritud. Antud valem kehtib mis tahes lõigul $[a; b]$ pideva funktsiooni korral.

Arvutamisel kirjutatakse valem sageli kujul $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Järelikult **kõvertrapetsi pindala** $S = \int_a^b f(x)dx$, kus $f(x) \geqslant 0$

3. Määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ arvutamiseks

a) leitakse integreeritava funktsiooni . . . . . .;

b) leitakse algfunktsiooni väärtused . . . . . ja . . . . . .raja kohal;

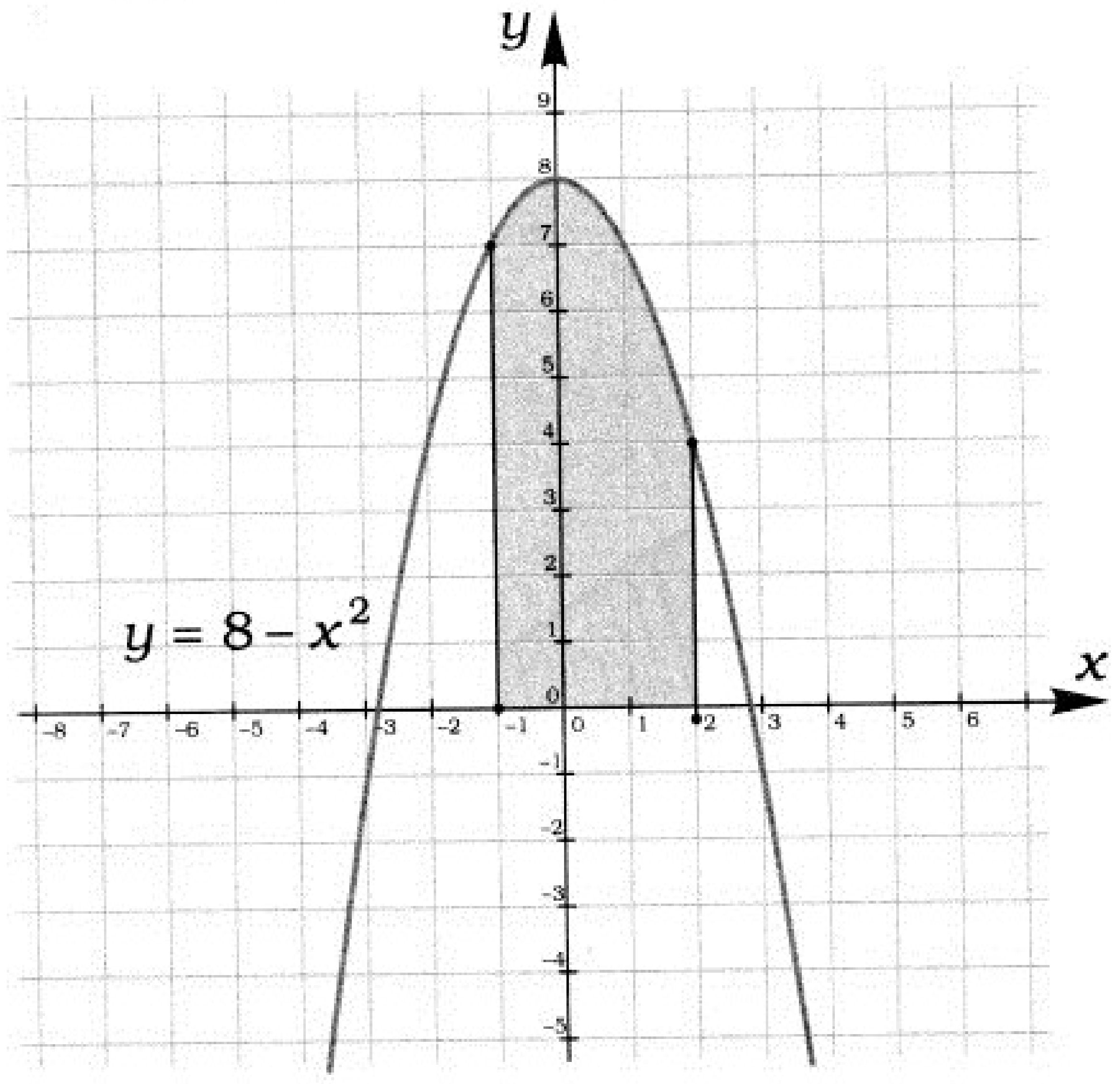
c) lahutatakse algfunktsiooni väärtusest . . . . . .raja kohal algfunktsiooni väärtus . . . . . .raja kohal.

4. Leia $\int_{-1}^{2}\left(8-x^2\right)dx$.

a) Integreeritava funktsiooni algfunktsioon on funktsioon $y = 8x - \frac{x^3}{3}$.

b) Rakendades Newtoni-Leibnizi valemit, saame

$$\int_{-1}^{2}\left(8-x^2\right)dx = \left(8x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(8\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(8\cdot(-1) - \frac{\ldots\ldots}{3}\right) = 13\frac{1}{3} - \ldots\ldots = \ldots$$



Geomeetriliselt annab saadud tulemus vastava kõvertrapetsi pindalaks 21 üh².

5. Leia määratud integraalid.

a) $$\int_{-2}^{1}\left(-3x^2 - 2x + 5\right)dx = \left(-3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + 5\ldots\ldots\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(-x^3 - x^2 + 5x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-1^3 - 1^2 + 5\cdot 1\right) - (\ldots\ldots\ldots\ldots) = 3 - \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

b) $\int_{1}^{4}\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}}dx$

Kõigepealt lihtsustame integreeritava avaldise.

$$\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} = \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$\int_{1}^{4}\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}}dx = \int_{1}^{4}(\ldots\ldots\ldots)dx = \left(x + \frac{2}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right)\Big|_{1}^{4} = \ldots\ldots\ldots$$

. . . .

c) $\int_{-1}^{2} \frac{2^{2x}-4}{2^x+2}\,dx$

Lihtsustame integreeritava avaldise.

$\frac{2^{2x}-4}{2^x+2} = \frac{(2^x-2)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{2^x+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\int_{-1}^{2} \frac{2^{2x}-4}{2^x+2}\,dx = \int_{-1}^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$

Lihtsustame integreeritava avaldise.

$\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\ldots\ldots\ldots)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $\int_{0}^{1} (2x-1)^4\,dx$

Kasutame integreerimiseks muutujavahetust $t = 2x-1$, siis $dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

$\int_{0}^{1} (2x-1)^4\,dx = \int_{0}^{1} t^{\cdots\cdots} \frac{dt}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Vastused. 9; 2; $\frac{7-12\ln 2}{2\ln 2}$; $\frac{\pi+\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{1}{5}$

28. MÄÄRATUD INTEGRAALI OMADU

Täida lüngad.

1. omadus

Summa (vahe) integraal võrdub liidetavate integraalide . . . . . .

. . . . . .

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_{-3}^{4} \left(3x^2 - 4\right)dx = \int_{-3}^{4} 3x^2 dx - \int_{-3}^{4} 4dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. omadus

Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali . . . . . .

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_1^2 4e^x dx = 4\int_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

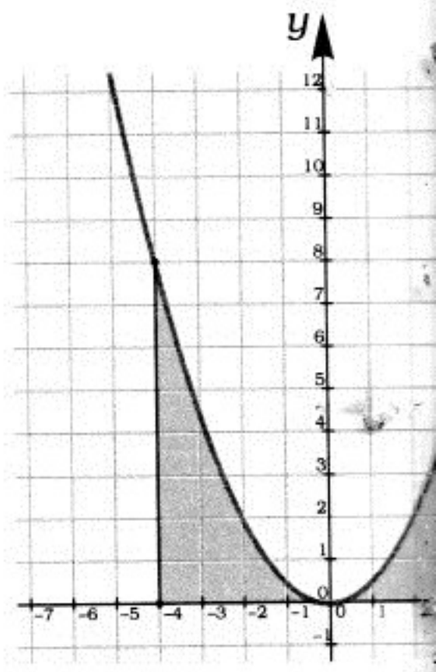
3. omadus

Kui vahetada integraali rajad, siis muutub . . . . . .

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

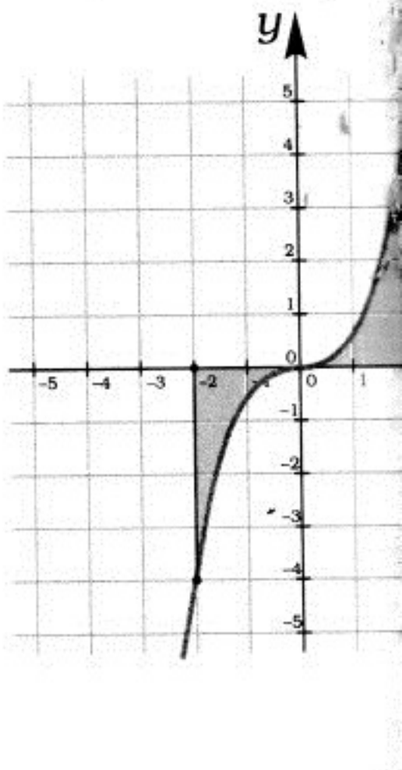
4. omadus. Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $\left[a; b\right]$,

siis $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, kus $a < c < b$.



5. omadus. Kui funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$



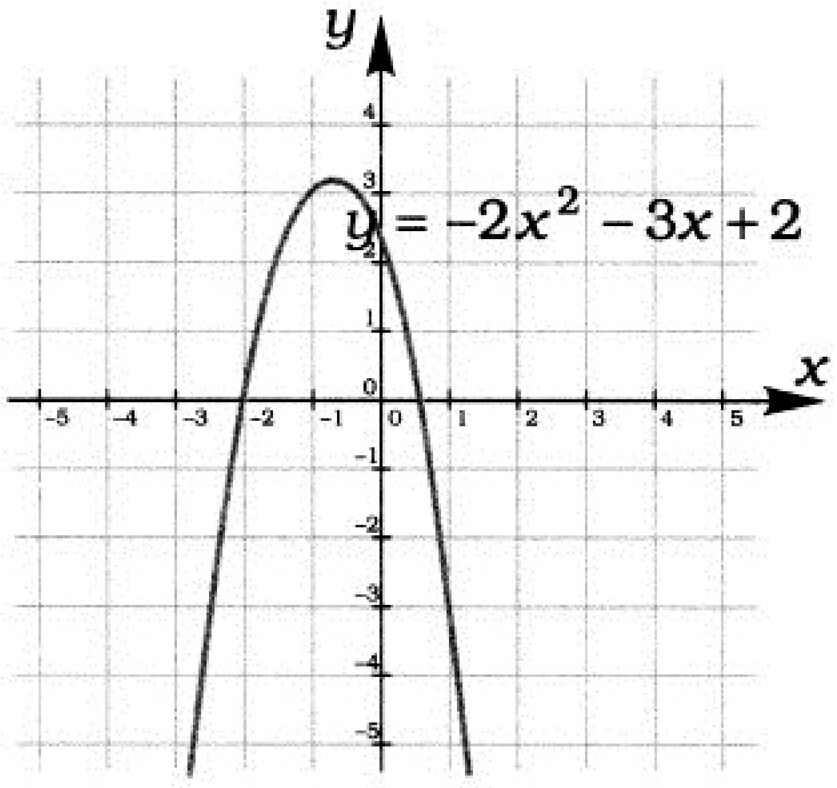
6. omadus. Kui funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

29. KÕVERTRAPETSI PINDALA ARVUTAMINE

Täida lüngad.

1. Kõvertrapets on piiratud parabooliga $y = -2x^2 - 3x + 2$, sirgetega $x = -1$ ja $x = 0$ ning x-teljega. Viiruta joonisel tekkinud kõvertrapets ja leia selle pindala.



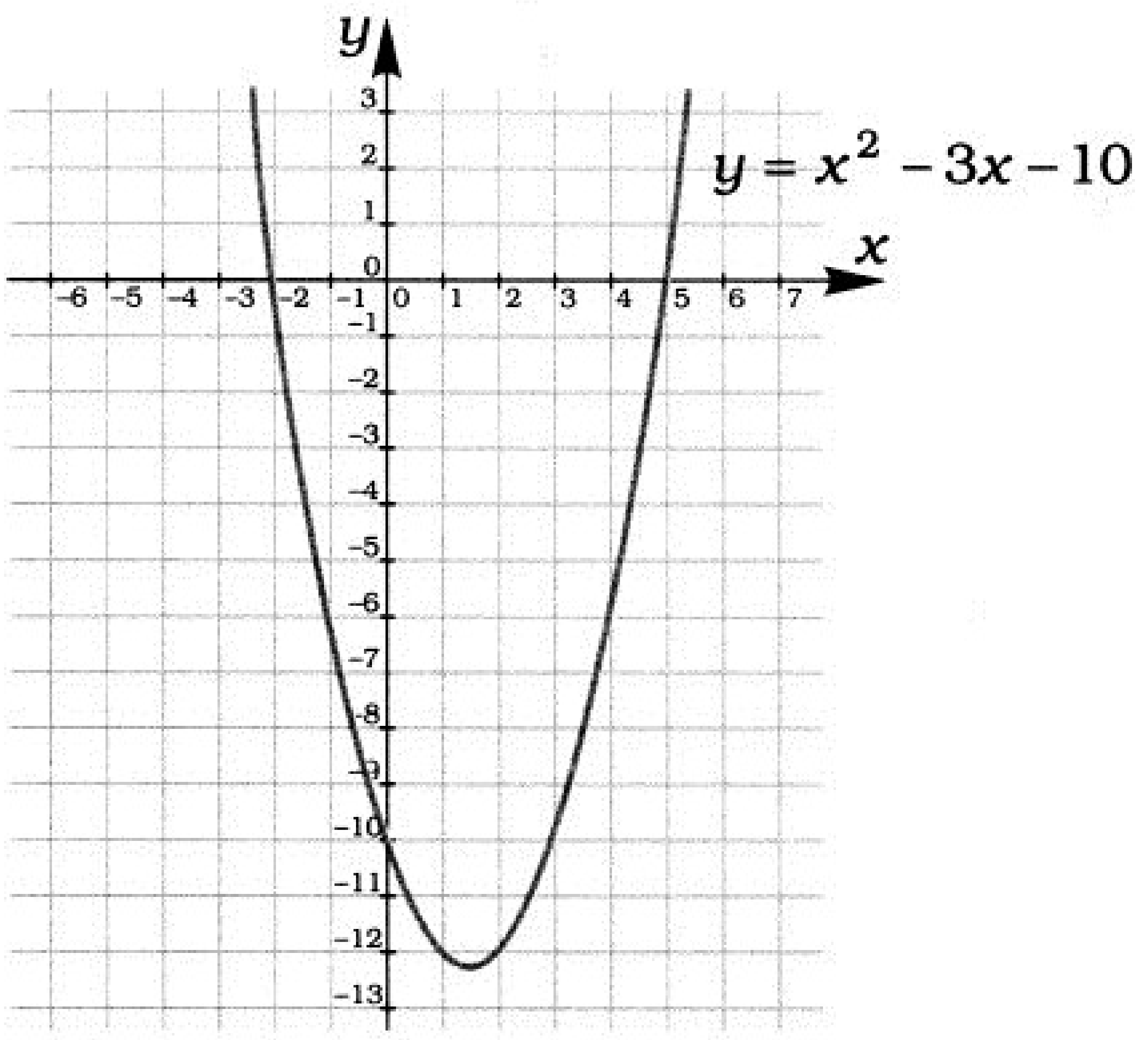
Rakendame valemit $S(x) = \int\limits_a^b f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$S = \int\limits_{-1}^{0} \left(-2x^2 - 3x + 2\right)dx = \left(-2 \cdot \frac{\ldots}{\ldots} - 3 \cdot \frac{\ldots}{\ldots} + 2 \cdot \ldots\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(-2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} - 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 2\frac{5}{6}\ (\text{üh}^2)$$

Vastus. Kõvertrapetsi pindala on $2\frac{5}{6}$ üh².

2. Kõvertrapets on piiratud parabooliga $y = x^2 - 3x - 10$, sirgetega $x = -1$ ja $x = 4$ ning x-teljega. Viiruta joonisel tekkinud kõvertrapets ja leia selle pindala.



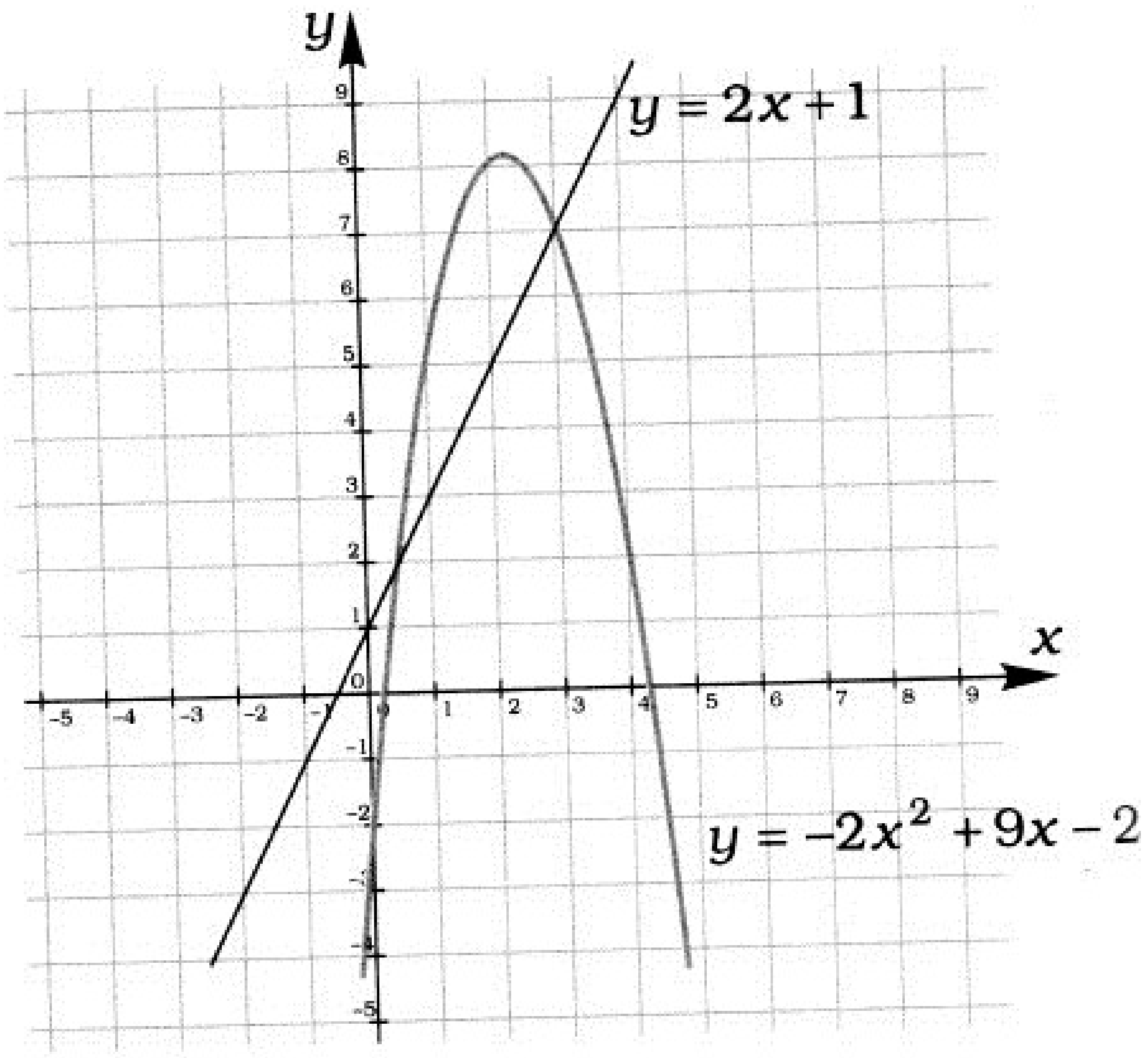
$$\int\limits_{-1}^{4} \left(x^2 - 3x - 10\right)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = -50\frac{5}{6}$$

Kuna trapets asub allpool x-telge, siis saime kõvertrapetsi pindala vastandarvu.

Vastus. Kõvertrapetsi pindala on $50\frac{5}{6}$ üh².

3. Kujund on piiratud joontega $y=-2x^2+9x-2$ ja $y=2x+1$. Viiruta joonisel tekkinud kujund ja leia selle pindala.



Kuna kujundit piiravad kaks joont, siis saame otsitava pindala kahe kõvertrapetsi pindalade vahena.

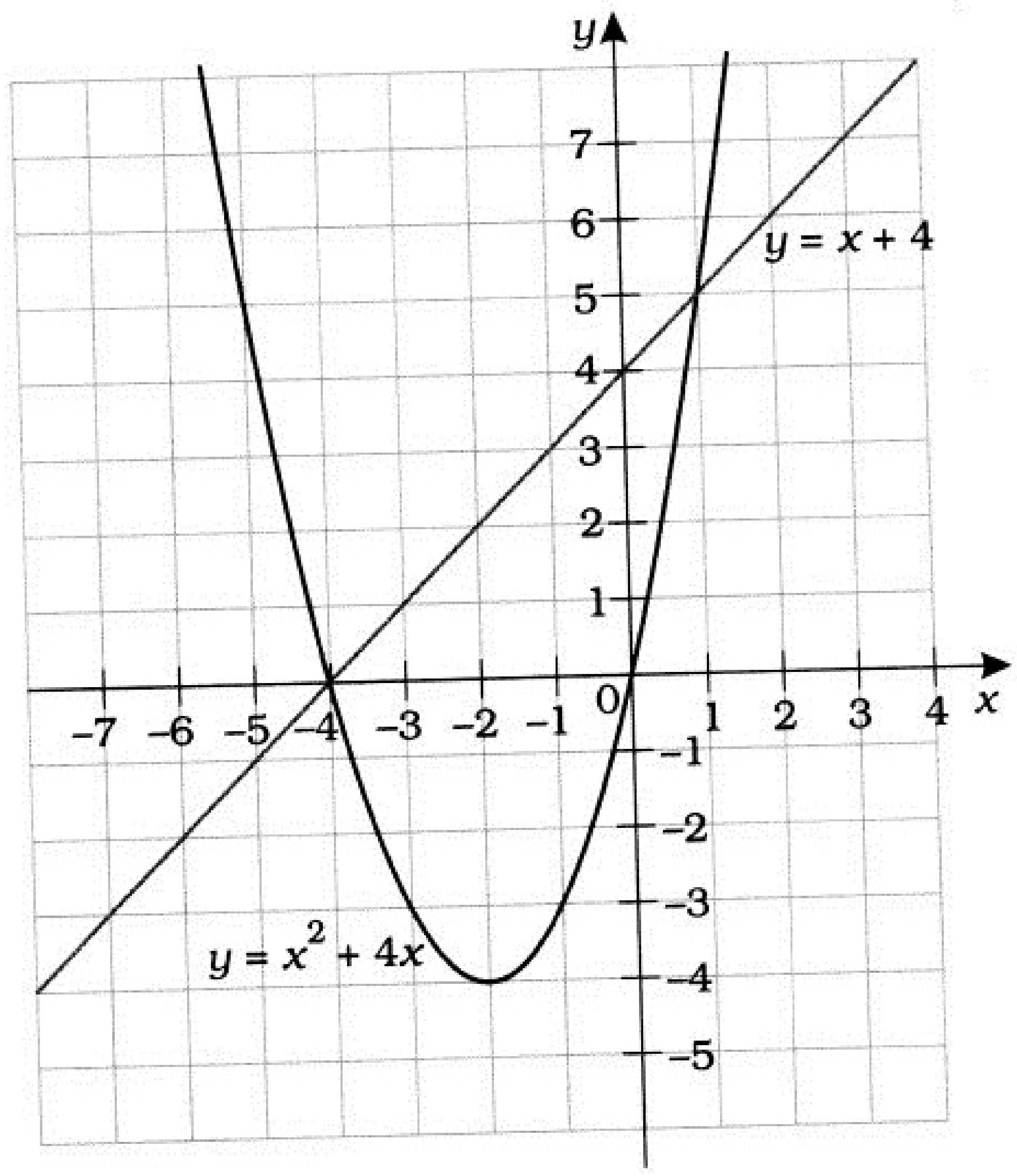
Esmalt leiame integraali rajad, s.o lõikepunktide abstsissid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} y=-2x^2+9x-2 \\ y=2x+1 \end{cases}$.

$$S=\int_{0,5}^{3}\left[\left(-2x^2+9x-2\right)-(2x+1)\right]dx= \ldots$$

$$\ldots = 5\frac{5}{24}\ (\text{üh}^2)$$

Vastus. Kujundi pindala on $5\frac{5}{24}$ üh².

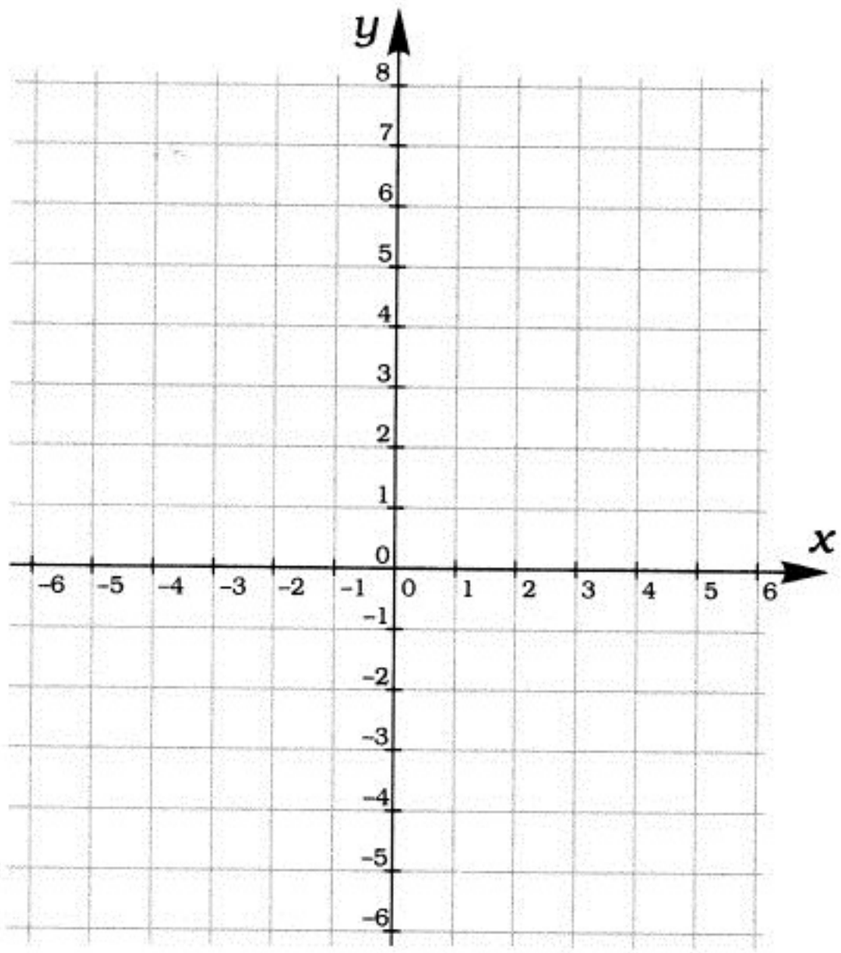
4. Kujund on piiratud joontega $y=x^2+4x$ ja $y=x+4$. Viiruta joonisel tekkinud kujund ja leia selle pindala.



Vastus. Kujundi pindala on $20\frac{5}{6}$ ü².

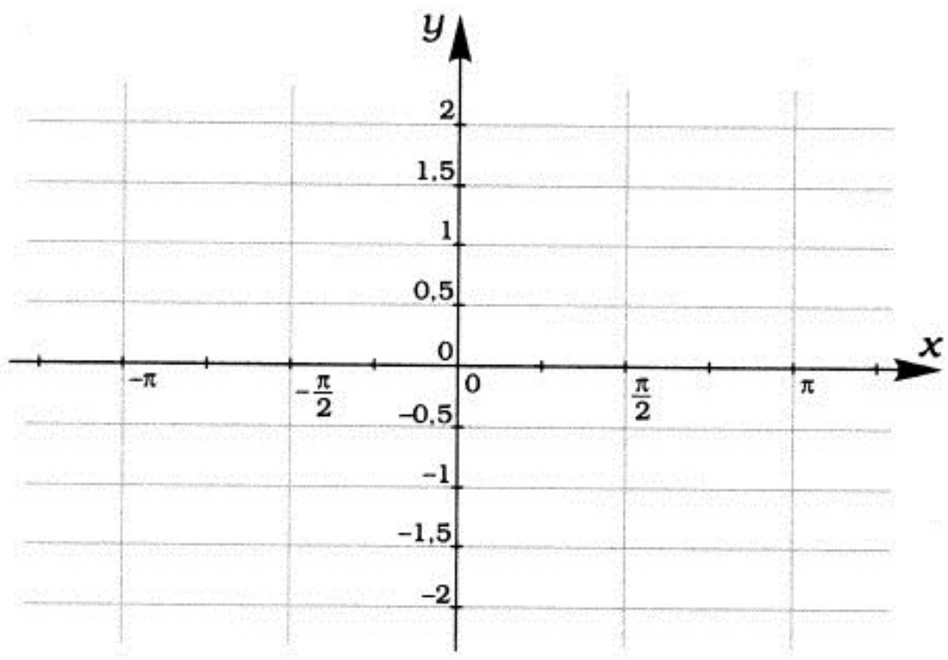
5. Skitseeri kujund ja arvuta selle pindala, kui kujundit piiravad antud jooned.

a) $y = x^2 - 4$ ja $y = x + 2$



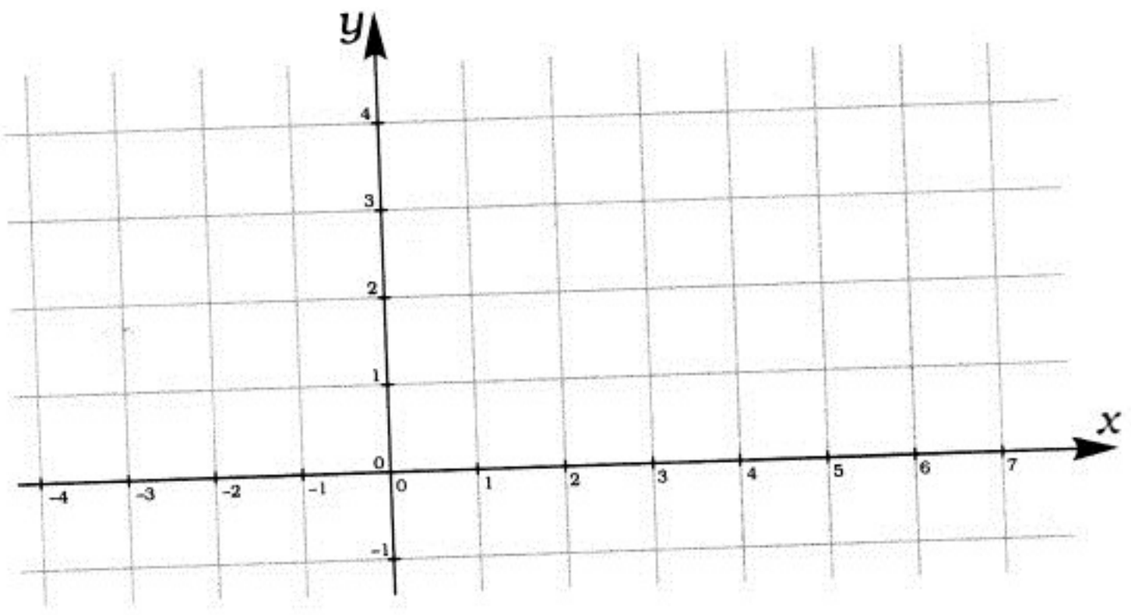
Vastus. Kujundi pindala on $20\frac{5}{6}$ üh².

b) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$



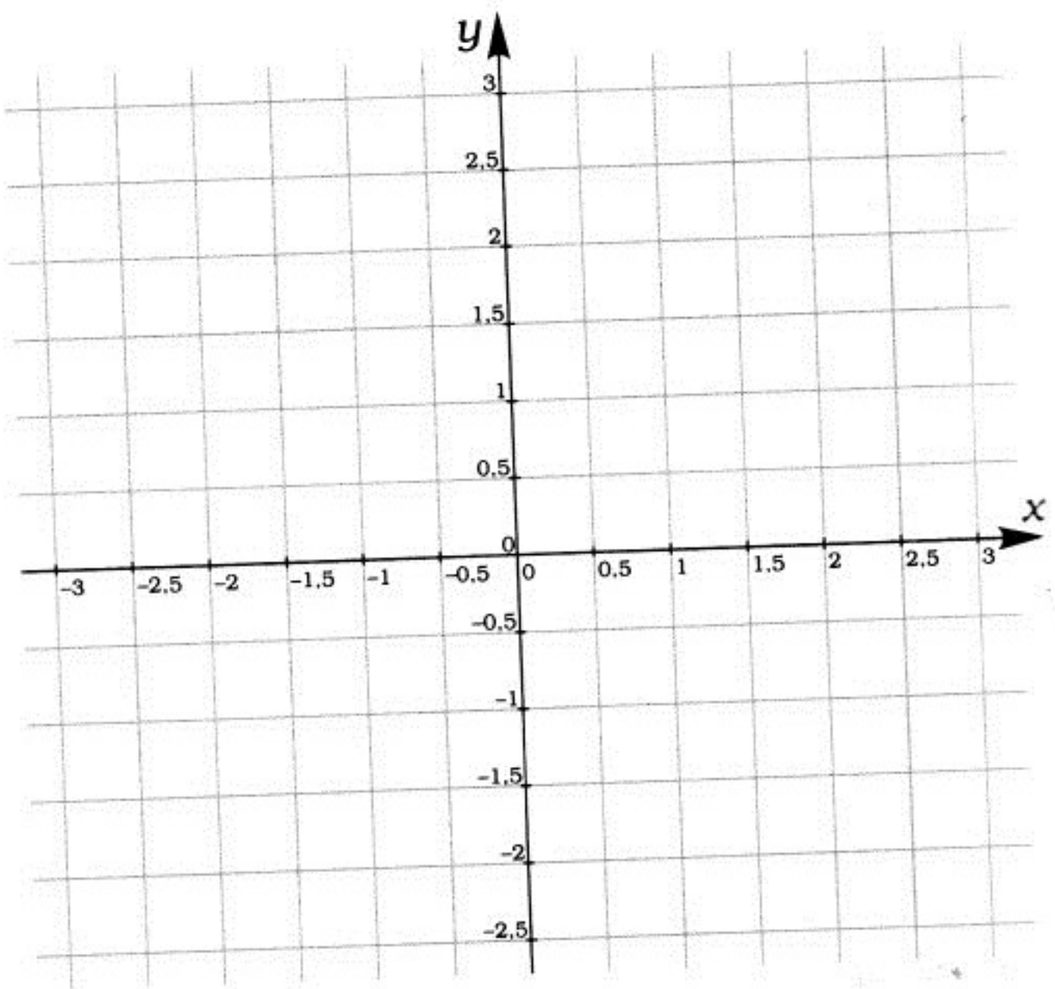
Vastus. Kujundi pindala on $\sqrt{2}$ üh².

c) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$



Vastus. Kujundi pindala on $\frac{1}{3}$ üh².

d) $y = \frac{2}{x},\ y = -x + 3$



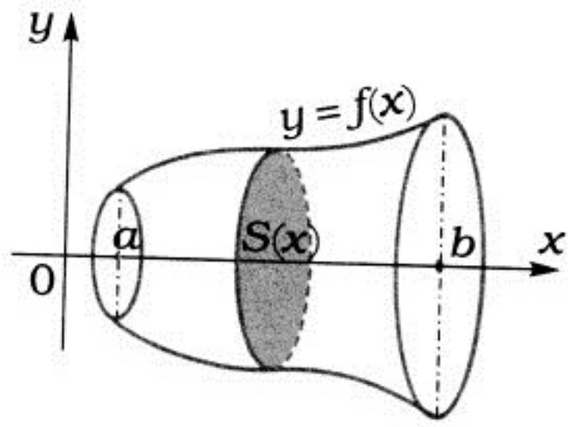
Vastus. Kujundi pindala on $1{,}5 - 2\ln 2 \approx 0{,}11$ üh².

30. PÖÖRDKEHA RUUMALA ARVUTAMINE

Täida lüngad.

1. Kui pöördkeha piiravad tasandid . . . . . ja . . . . . $(a < b)$ ning pind, mis tekib lõigus $[a; b]$ pideva funktsiooni $y = f(x)$ graafiku pöörlemisel ümber x-telje, siis avaldub ruumala valemiga

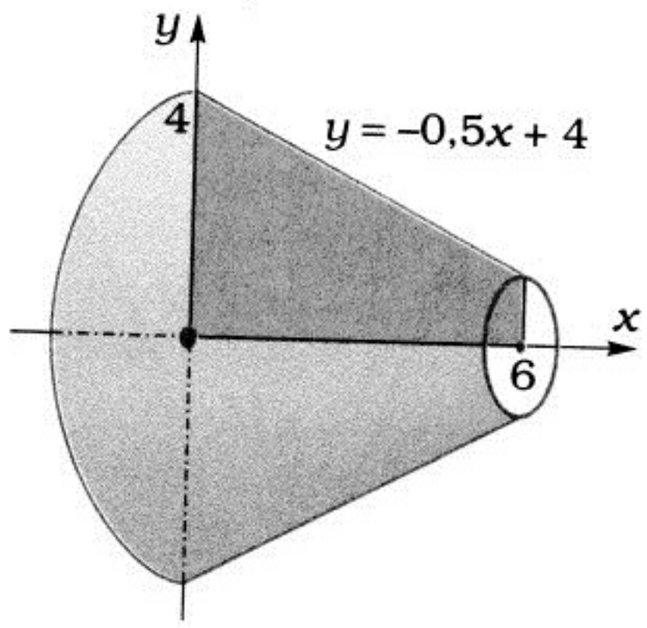
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$



2. Kuna pöördkeha x-teljega risti oleva lõike pindala on $S(x) = \ldots\ldots\ldots = \pi f^2(x)$, siis saab pöördkeha ruumala esitada valemiga $V = \pi \int_a^b \ldots\ldots\ldots dx$, kus $S(x)$ on keha . . . . . pindala. Seda valemit saab kasutada ka püramiidide ja prismade . . . . . leidmiseks.

3. Leia pöördkeha (tüvikoonuse) ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad jooned võrranditega

$y = -0{,}5x + 4$, $x = \ldots\ldots\ldots$, $x = \ldots\ldots\ldots$, $y = 0$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots)^2 dx = \pi \int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots) dx =$$

$$= \pi (\ldots\ldots\ldots)\Big|_{\ldots}^{\ldots} =$$

$$= \ldots\ldots\ldots = 42\pi \text{ (üh}^3\text{)}$$

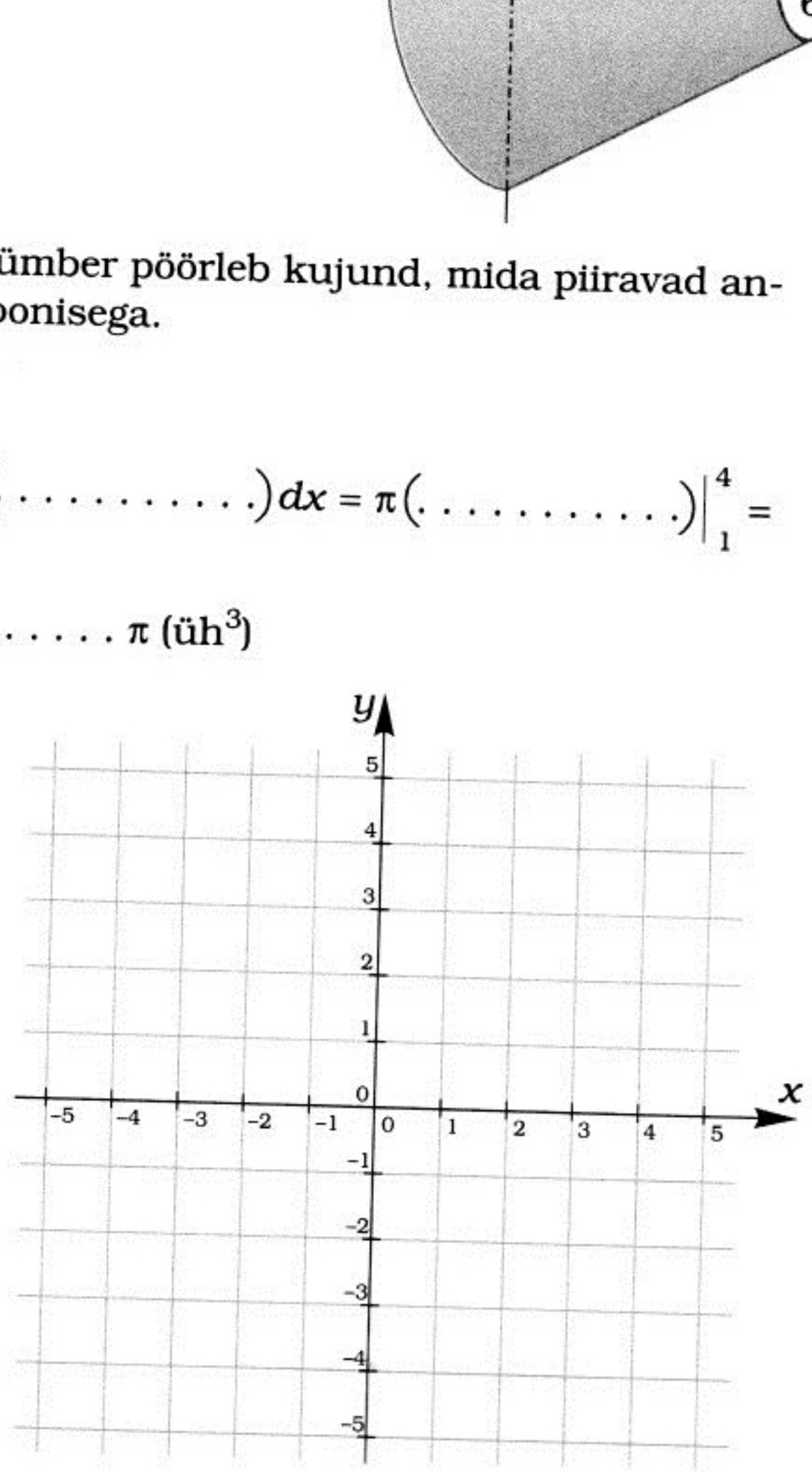
4. Leia pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x-telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad antud võrranditega jooned. Illustreeri lahendust joonisega.

a) $y = x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots)^2 dx = \pi \int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots) dx = \pi (\ldots\ldots\ldots)\Big|_1^4 =$$

$$= \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \pi \text{ (üh}^3\text{)}$$

Kontrolli saadud vastuse õigsust koonuse ruumala valemi abil.

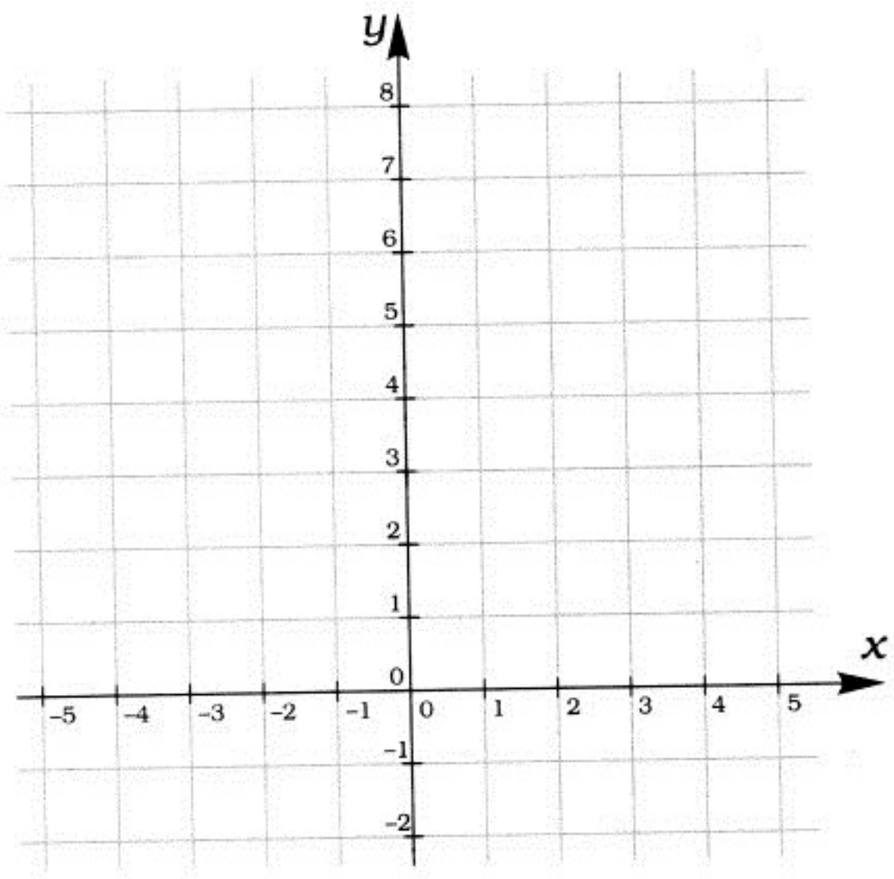


b) $y = 2x^2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0$

$V = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots\dots\dots)^2 dx = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

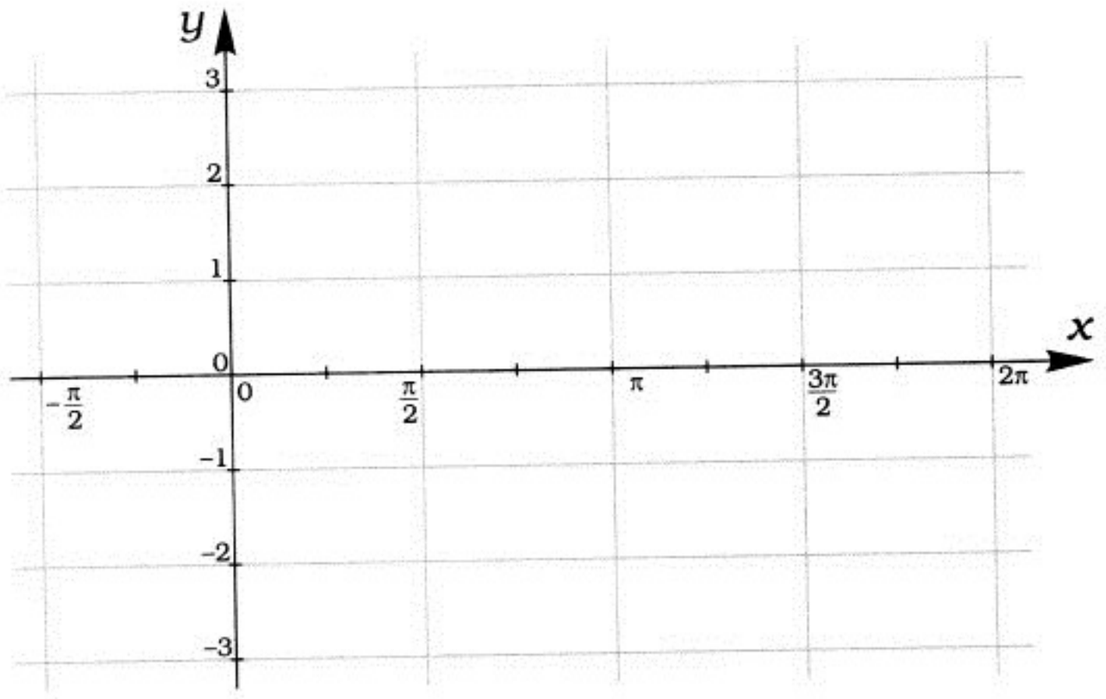


c) $y = \sin x,\ x = 0,\ x = \pi,\ y = 0$

$V = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots\dots\dots)^2 dx = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

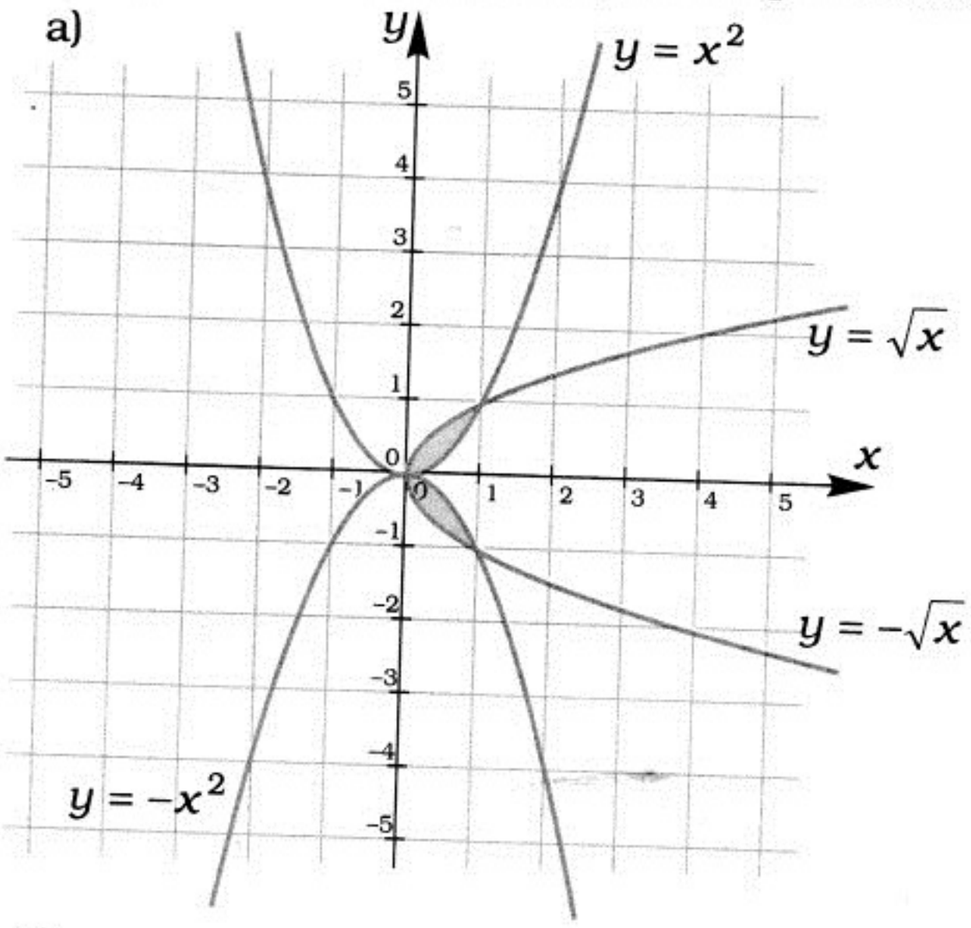
$\dots\dots\dots = 0{,}5\pi$ (üh^3)



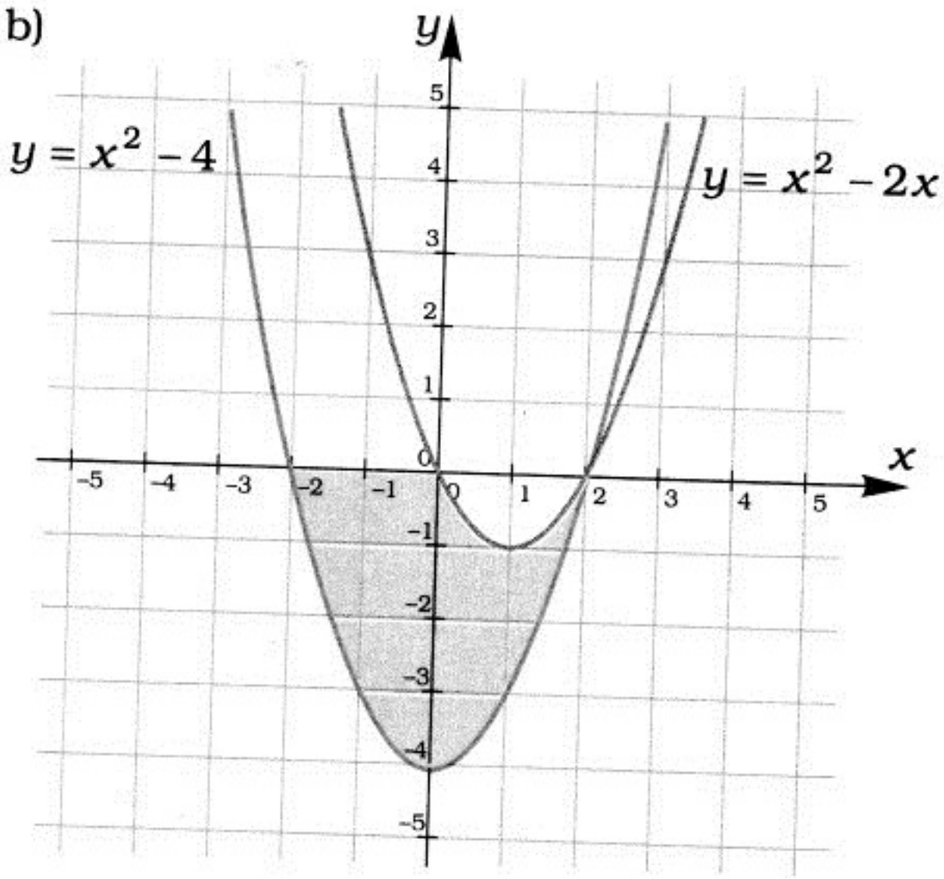
HARJUTUSÜLESANDED

1. Leia joonisel kujutatud kujundite pindalad.

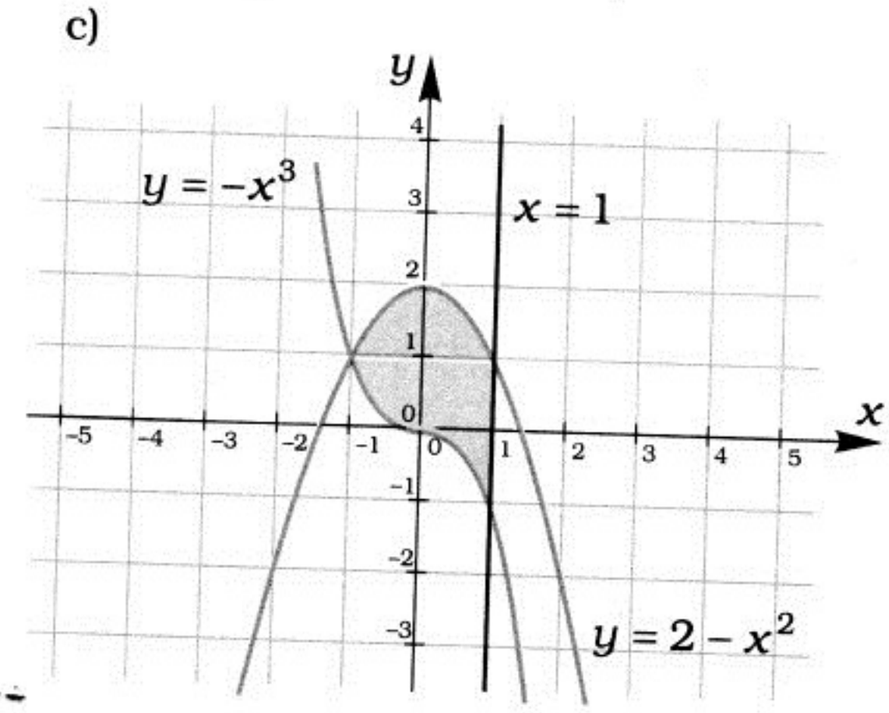
a)



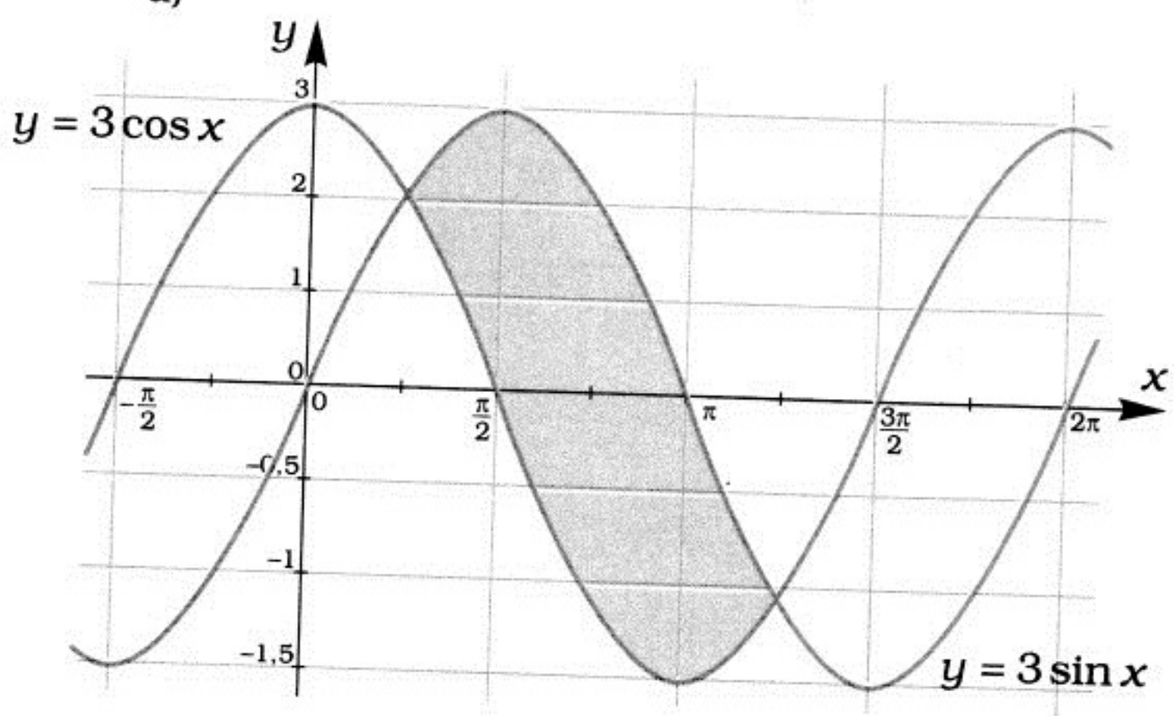
b)



c)



d)

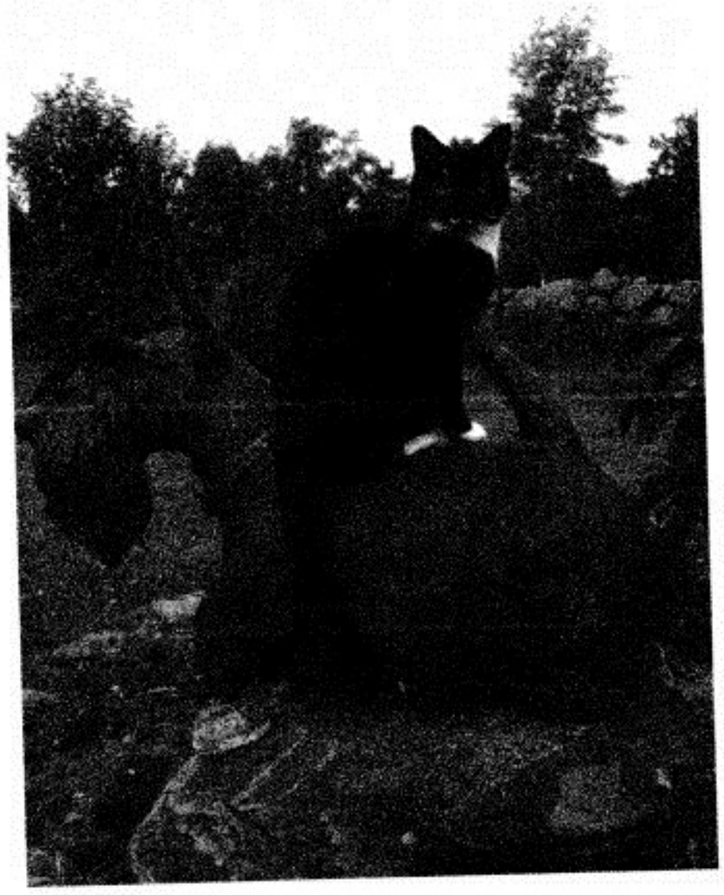


2. Kaardil on märgitud pinnatükk, mida piiravad jooned $y = 3x^2 + 3x$ ja $y = x^2 + 2x + 1$. Võrdle selle pinnatüki osi, mis jäävad vastavalt üles- ja allapoole x-telge. Kumb neist on suurem ja mitme protsendi võrra? Skitseeri joonis.

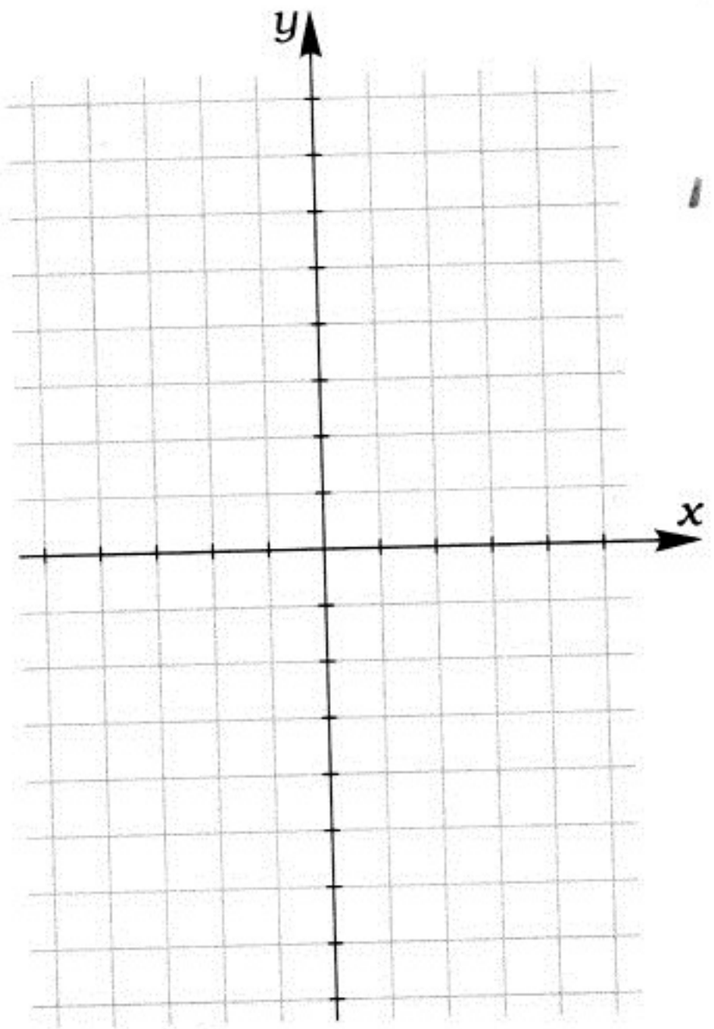
3. Funktsioonide $y = \sin 2x$ ja $y = \sin x$ graafikud lõikuvad lõigul $[0; \pi]$ kolmes punktis ning eraldavad kaks piiratud pinnatükki. Mitu protsenti moodustab väiksema pinnatüki pindala suuremast pindalast? Skitseeri joonis.

. Kujund on piiratud parabooliga $y = 2x^2$ ning punkte $A(2; 0)$ ja $B(0; 4)$ läbiva sirgega. Arvuta selle kujundi pindala. Skitseeri joonis.

5. Rasmus valmistas oma kassile Kikule kaarhallikujulise majakese, mille eestvaade on paraboolikujuline. Kaarhalli maksimaalne kõrgus on 40 cm ja laius põrandal 0,8 m. Kui suur on kaarhalli otsa pindala?



6. Pinnatükk, mis on piiratud joontega $y = x^3$, $y = 0$ ja $x = -2$, pöörleb ümber sirge $x = -2$. Leia tekkiva pöördkeha ruumala.



Vastused

1. $\frac{2}{3}$ üh^2; $9\frac{1}{3}$ üh^2; $3\frac{1}{3}$ üh^2; $6\sqrt{2}$ üh^2
2. Ülemine ja 125% võrra
3. $11\frac{1}{9}$ %
4. 9 üh^2
5. Ligikaudu 0,2 m^2
6. $\frac{16\pi}{5}$ ü^3

31. KORDAMINE

Kordamisülesannetena on kasutatud Tartu ülikooli ja Tallinna ülikooli 1983.–1997. aasta sisseastumiseksamite ülesandeid ja riigieksamiülesandeid.

I. ALGEBRA

1. Lihtsusta avaldis $\left(\frac{2x^2}{x-y}-x-y\right):\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

1) $\frac{2x^2}{x-y}-x-y=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{x-y}=\frac{x^2+y^2}{\ldots\ldots}$

2) $\frac{x^2+y^2}{x-y}:\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x-y)\ldots\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\ldots$

3) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

4) $x+y-\frac{x^2+xy+y^2}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{x+y}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

Vastus. Avaldise lihtsustamise tulemus on $\frac{xy}{x+y}$.

2. Lihtsusta avaldis $\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+1-\sqrt{x^2-1}}{x+1+\sqrt{x^2-1}}$.

Murru nimetajas kasuta valemit $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ning lugejas murdu laiendades summa ja vahe ruudu valemit.

$$\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+1-\sqrt{x^2-1}}{x+1+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+1\ldots\ldots\sqrt{x^2-1}\right)+\left(x+1-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+1\ldots\ldots\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+1-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{(x+1)^2+2(x+1)\sqrt{x^2-1}+x^2-1+(x+1)^2-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x+1)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x+1)^2+2\left(x^2-1\right)}{(x+1)^2-x^2+1}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{x^2+2x+1-x^2+1}=\frac{4x^2+\ldots\ldots}{2x+2}=\frac{4x(\ldots\ldots)}{2(x+1)}=\ldots\ldots$$

Vastus. Avaldise lihtsustamise tulemus on $2x$.

3. Arvuta avaldise $\left[\frac{a+c}{a^3c+a^2-ac-1}+\frac{ac+1}{1-a^2}:(a+c)\right]\cdot\frac{a^3+c^3}{3-3c^2}$ väärtus, kus a ja c on ruutvõrrandi $x^2+3x-3=0$ lahendid.

1. Leia sulgudes olev jagatis.

$$\frac{ac+1}{1-a^2}:(a+c)=\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{(1-a)(\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)}$$

2. Sulgudes oleva esimese murru nimetaja lihtsustamiseks kasuta rühmitamisvõtet.

$$a^3c+a^2-ac-1=a^2(ac+1)-(ac+\ldots.)=(ac+1)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

3. Leia sulgudes olev summa.

$$\frac{a+c}{(ac+1)(a-1)(a+1)}+\frac{ac+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=$$

$$=\frac{1-c^2}{(ac+1)(\ldots\ldots\ldots)}$$

4. Leia korrutis.

$$\frac{1-c^2}{(ac+1)(a+c)}\cdot\frac{a^3+c^3}{3-3c^2}=$$

$$=\frac{a^2-ac+c^2}{3(ac+1)}$$

5. Kuna a ja c on ruutvõrrandi $x^2+3x-3=0$ lahendid, siis Viète'i teoreemi põhjal $a+c=-3$ ja $a\cdot c=-3$.

6. Teisenda lugeja täisruuduks, liites ja lahutades $3ac$.

$$\frac{\left(a^2-ac+c^2+3ac\right)-3ac}{3(ac+1)}=\frac{\left(a^2+\ldots\ldots\ldots+c^2\right)-3ac}{3(ac+1)}=\frac{(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2-3ac}{3(ac+1)}=$$

$$=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{3\cdot(-3+1)}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots$$

Vastus. Avaldise väärtus on ..

4. Lihtsusta avaldis $\frac{x-1}{x^{0,75}+x^{0,5}}\cdot\frac{x^{0,5}+x^{0,25}}{x^{0,5}+x^0}\cdot x^{0,25}+1$ ja arvuta selle väärtus, kui $x=16$.

Kümnendmurrulised astendajad teisenda harilikuks murruks ning seejärel vajaduse korral juurteks.

Näiteks $x^{0,75}=x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^2}$.

1) $\frac{x-1}{x^{0,75}+x^{0,5}}=\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x^2}+\sqrt{x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$

2) $\frac{x^{0,5}+x^{0,25}}{x^{0,5}+x^0}=\frac{\ldots\ldots+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt[4]{x}(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\sqrt{x}+1}$

3) $\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\sqrt{x}}$.

4) $\dfrac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x}=\dfrac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x^2}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}=\ldots\ldots$

5) $\sqrt{x}-1+1=\ldots\ldots$

6) $\sqrt{x}=\sqrt{\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots$

Vastus. Avaldise lihtsustamise tulemus on $\sqrt{x}$ ning avaldise väärtus on $\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Lihtsusta avaldis $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$.

Vastus. Avaldise lihtsustamise tulemus on $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Lahenda ülesanded vihikusse.

Vastused leiad lk 110.

1. *RE 1998.* Lihtsusta avaldis $\dfrac{8^{-x}\cdot 12^{x+2}}{6^{2-x}\cdot 18^{x}\cdot 2^{1-x}}$ ja näita, et selle väärtus ei sõltu x-i väärtusest.

2. Lihtsusta avaldis $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\cdot\left(a^{-1}+b^{-1}\right)+\dfrac{2\left(a^{-0,5}+b^{-0,5}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{3}}$ ja arvuta selle väärtus, kui $a=1{,}25$ ning $b=0{,}2$.

3. Lihtsusta avaldised.

a) $\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{16}{4-x}$

c) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}-6y}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-4y}$

d) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\left(\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}-x}-\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$

Lihtsusta avaldis $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$ ning arvuta selle väärtus, kui $a=1-\sqrt{2}$ ja $b=1+\sqrt{2}$.

II. VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

1. Lahenda juurvõrrand.

$\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}$

Tõsta mõlemad pooled ruutu.

$\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x} \,\Big|\,(\,)^2$

$3+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{5-x} = x - \ldots\ldots\ldots \,\Big|\,(\,)^2$

$5 - x = x^2 - 6x + \ldots\ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Kontroll.

Vastus. $x = 4$

2. Lahenda võrrand $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}} = 3^{x\left(\sqrt{x}-1\right)}$.

Teisenda vasak pool.

$\sqrt[3]{\left(3^3\right)^{5\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\left(3^{5\sqrt{x}}\right)^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3^{5\sqrt{x}} = 3^{x\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Kuna astme alused on võrdsed, siis on ka astendajad võrdsed.

$5\sqrt{x} = x\left(\sqrt{x}-1\right)$

Kontroll.

Vastus. $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \dfrac{11 \pm \sqrt{21}}{2}$

3. Lahenda võrrand $\log_2\left(4^{x+1}+4\right)\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{8}}$.

Teisenda parem pool.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{8}}=\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\cdots\cdot}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Teisenda vasak pool. Kasuta logaritmi omadusi.

$$\log_2\left(4^{x+1}+4\right)\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=\log_2\left[4\left(4^x+1\right)\right]\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=$$

$$=\left[\log_2 4+\log_2(\ldots\ldots\ldots\ldots)\right]\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=\left[2+\log_2(\ldots\ldots\ldots\ldots)\right]\cdot\log_2\left(4^x+1\right)=$$

$$=\left[\log_2\left(4^x+1\right)\right]^2+2\log_2\left(4^x+1\right)$$

Kasuta muutuja asendust.

$\log_2\left(4^x+1\right)=t\Rightarrow t^2+2t-3=0$

Lahendid on . . . . . .

Tee tagasiasendus.

a) $\log_2\left(4^x+1\right)=1$

. . . . . .

$x_1=0$

b) $\log_2\left(4^x+1\right)=-3$

. . . . . .

$4^x=-\frac{7}{8}$

Antud võrrandil . . . . . .

Kontroll.

Vastus. $x=0$

4. Lahenda võrrand $x^2+px+35=0$, teades, et lahendite ruutude summa on 74.

Üks võimalik lahendusviis.

Vastavalt ülesande tekstile ja Viète'i teoreemile saame võrrandisüsteemi.

$$\begin{cases}x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=74\\ x_1\cdot x_2=35\end{cases}$$

Kasuta asendusvõtet.

$$x_2=\frac{35}{x_1}$$

$$x_1^{\,2}+\left(\frac{35}{x_1}\right)^2=74$$

Lahenda murdvõrrand ja biruutvõrrand.

$x_1 = \ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots$

Vastus. Kui $p = 12$, siis $x_1 = -7$ ja $x_2 = -5$. Kui $p = -12$, siis $x_1 = 5$ ja $x_2 = 7$.

5. Lahenda võrrandisüsteem $\begin{cases} x(y+z) = 5 \\ y(z+x) = 8 \\ z(x+y) = 9 \end{cases}$.

Lahendus. Ava võrrandites sulud ja tee sobivad asendused.

Vastus. $(1;\ 2;\ 3), (-1;\ -2;\ -3)$

6. Lahenda võrratus $\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 0$.

Lahendus. Kasuta intervallide meetodit.

$$\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 0$$

$$(x^2+10x+16)(x-1) > 0$$

$$x^2+10x+16 = 0$$

$x_1 = \ldots\ldots\ldots$

$x_2 = \ldots\ldots\ldots$

$$x-1 = 0$$

$x_3 = \ldots\ldots\ldots$

Kanna lahendid teljele ja leia lahendipiirkond.

Vastus. $]-8; -2[\cup]1; \infty[$

7. Lahenda võrratused.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} < 3^{-x}$

Vastus. $x < 1$

b) $\log_{3-2x} \frac{1}{3} \geqslant 1$

Vastus. $1 < x \leqslant 1\frac{1}{3}$

c) $3^{\frac{x-3}{3x-2}} \leqslant \frac{1}{3}$

Vastus. $\left]\frac{2}{3}; 1\frac{1}{4}\right]$

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Lahenda võrratus $|x+2| < x^2$.

2. Lahenda võrratus $\frac{8-6x}{2x+4} < 2$.

3. Lahenda juurvõrrand $\sqrt{9+x\sqrt{8x^2+9}} = x+3$.

4. Lahenda võrrandisüsteem $\begin{cases} x-y^2=0 \\ \frac{x-y}{a+1}=0 \end{cases}$ tundmatute x ja y suhtes, kui $a > -\frac{1}{2}$.

5. Lahenda võrrand ja kontrolli lahendit.

a) $5^{x+1}+4\cdot 5^{x-2}+5^{x-3} = 25^{-1}\cdot 646$

b) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$

6. Lahenda võrrand $\log(x+6) - \frac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$.

7. Leia avaldise $x+2y$ vähim väärtus, kui $x^2+y+2x=9$ ja $(x+y)^2 = 9$.

8. Milliste a väärtuste korral võrrandil $x = 1+\frac{x+2}{a}$ lahendid puuduvad?

III. JADAD

1. Puuraugu esimese meetri puurimise eest maksti 300 eurot ja iga järgmise meetri eest 200 eurot rohkem kui eelmise eest. Koos preemiaga, mis oli 2000 eurot, maksti puuraugu tegemise eest 11 900 eurot. Leia puuraugu sügavus.

Lahendus. Tegemist on aritmeetilise jadaga, kus esimene liige on $a_1 = 300$ ja jada vahe $d = 200$. Koos preemiaga maksti tasuks 11 900 eurot. Järelikult on $S_n = 11\,900 - 2000 = 9900$. Kasuta aritmeetilise jada summa valemit $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

$$9900 = \frac{2 \cdot \ldots\ldots\ldots + (n-1) \cdot \ldots\ldots\ldots}{2} \cdot n$$

Vastus. Puuraugu sügavus on 9 m.

2. Kolm arvu, mille summa on 52, moodustavad geomeetrilise jada. Kui keskmisele arvule liita 8, moodustavad arvud aritmeetilise jada. Leia need arvud.

Lahendus. Olgu geomeetrilise jada kolm esimest liiget a_1, a_2, a_3. Kui avaldada teine ja kolmas liige geomeetrilise jada üldliikme $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ põhjal, saame $a_2 = a_1 \cdot q$ ja $a_3 = a_1 \cdot q^2$. Kui liita keskmisele liikmele 8, saame aritmeetilise jada a_1, $a_1 \cdot q + 8$, $a_1 \cdot q^2$. Moodusta võrrandisüsteem antud andmete ja aritmeetilise jada definitsiooni põhjal.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \ldots\ldots\ldots \\ (a_1 q + 8) - a_1 = a_1 q^2 - (a_1 q + 8) \end{cases}$$

Kontroll.

Vastus. Need arvud on 4; 12; 36 või 36; 12; 4.

3. Aritmeetilise jada neljanda, kaheksanda, kaheteistkümnenda ja kuuteistkümnenda liikme summa on 500. Leia esimese 19 liikme summa.

Lahendus. Vastavalt tekstile on $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 500$. Kui asendada liidetavad jada esimese liikme ja vahe põhjal, siis $a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 11d + a_1 + 15d = 500$.

Lihtsusta võrrand ja leia summa $a_1 + a_{19}$.

Summa leidmiseks kasuta aritmeetilise jada summa valemit $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot \ldots\ldots = \frac{\ldots\ldots\ldots}{2} \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Vastus. Esimese 19 liikme summa on 2375.

4. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada liikmete summa on 4. Nende kuupide summa on $\frac{64}{7}$. Leia esimene liige ja tegur.

Lahendus. Kasutades lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada liikmete summa valemit $S_n = \frac{a_1}{1-q}$, koosta võrrand $\ldots\ldots = \frac{a_1}{1-q}$. Liikmete kuupide summa on $\frac{64}{7} = \frac{{a_1}^3}{1-q^3}$,

kus jada teguriks on $\frac{a_2}{a_1} = \frac{(a_1 q)^3}{(a_1)^3} = \ldots\ldots$

Moodusta võrrandisüsteem ja lahenda.

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 4 \\ \frac{{a_1}^3}{1-q^3} = \frac{64}{7} \end{cases}$$

Kontroll. Kuna jada peab olema kahanev, siis $q = 0{,}5$.

Vastus. $a_1 = 2$, $q = 0{,}5$

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Neli arvu on geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Kui nendest lahutada vastavalt 2; 1; 7 ja 27, saame aritmeetilise jada järjestikused liikmed. Leia need arvud.

2. Kolme arvu summa on 217. Need arvud on teatava geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget ja teatava aritmeetilise jada 2., 9. ja 44. liige. Mitu esimest liiget tuleb sellest aritmeetilisest jadast võtta, et nende summa oleks 820?

3. *RE 1999.* Metsalangil arvatakse olevat 6500 m^3 puitu. Puidu iga-aastane juurdekasv on keskmiselt 2% .

a) Kui palju on sellel metsalangil puitu 4 aasta pärast?

b) Mitme aasta pärast puidu kogus sellel langil kahekordistub?

4. Lapse 10. sünnipäeval avatakse talle 5000-eurose sissemaksuga tähtajaline hoius, mille intress on 4,5% . Kui suureks kasvab see hoius nooruki 15. sünnipäevaks eeldusel, et intressimäär ei muutu?

5. On antud aritmeetiline jada 7, 11, 15, . . . Milliste n väärtuste korral selle jada n esimese liikme summa ei ületa arvu 375?

IV. TRIGONOMEETRIA

1. Tõesta võrdus $16\sin10^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ\cdot\sin90^\circ=1$.

Lahenduses kasuta murru põhiomadust, kahekordse nurga ja täiendusnurga valemeid.

Vasak pool. $16\sin10^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ\cdot\sin90^\circ=16\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ=$

$$=\frac{8\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ\cdot\cos10^\circ}{\cos10^\circ}=\frac{4\cdot2\sin10^\circ\cdot\cos10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ}{\ldots\ldots\ldots}=$$

$$=\frac{4\sin\ldots.^\circ\cdot\sin70^\circ\cdot\sin50^\circ}{\ldots\ldots\ldots}=\frac{4\sin20^\circ\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\sin50^\circ}{\cos10^\circ}=$$

$$=\frac{\ldots\ldots\cdot\sin40^\circ\cdot\sin50^\circ}{\cos10^\circ}=\frac{2\cdot\sin40^\circ\cdot\cos.\ldots.^\circ}{\cos10^\circ}=\frac{\sin.\ldots.^\circ}{\sin.\ldots.^\circ}=\ldots\ldots\ldots$$

Parem pool on võrdne ühega, mida oligi tarvis tõestada.

2. Lihtsusta $\dfrac{(1-\cos2\alpha)\cdot\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin4\alpha}$.

$$\frac{(1-\cos2\alpha)\cdot\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin4\alpha}=\frac{(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos45^\circ\cos2\alpha-\ldots\ldots\ldots\ldots)}{2\sin^2 2\alpha-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=$$

$$\frac{2\sin^2\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos2\alpha-\sin2\alpha)}{2\sin2\alpha(\sin2\alpha-\ldots\ldots\ldots)}=\frac{\sqrt{2}\sin^2\alpha(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{4\sin\alpha\cos\alpha(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\ldots\ldots$$

Vastus. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\tan\alpha$

3. Lahenda võrrand $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.

Asenda $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $\cos x = u$

. . . . . .

$u_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{. . . . . .}}{4} = \dfrac{. . . . . .}{. . . . . .}$

$u_1 = ...$, $u_2 = ...$

$\cos x = 1$, $x_1 = \pm \arccos 1 + 2n\pi$, $x_1 = ...$, $n \in Z$

$\cos x = ...$, $x_2 = \pm \arccos . . . . . + 2n\pi$, $x_2 = ...$, $n \in Z$

Erilahendid.

Kontroll.

Vastus. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$

4. On antud funktsioon $f(x) = \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x$.

a) Lihtsusta avaldis $f(x) + 2\sin 2x - \cos 2x$.

b) Lahenda võrrand $f(x) = 0$, kus $x \in [0;\ \pi]$.

c) Lahenda võrratus $f(x) \geqslant \cos 2x$.

Lahendus.

a) $f(x) + 2\sin 2x - \cos 2x = \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x + 2\sin 2x - \cos 2x =$

. . . . . $= 2$

b) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$, kus $x \in [0;\ \pi]$

$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

$x_1 = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = \arctan 3 + n\pi$, $n \in Z$

Antud lõiku kuuluvad lahendid . . . . . .

Kontroll.

c) $f(x) \geqslant \cos 2x$

$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x \geqslant \cos 2x$

$\sin^2 x - 2 \ldots\ldots\ldots + 3\cos^2 x \geqslant \ldots\ldots\ldots$

$\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x \geqslant 0$

$2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x \geqslant 0 \,|:2$

. . . . . .

Kasuta vahe ruudu valemit.

$(\sin x - \ldots\ldots\ldots)^2 \geqslant 0$

$x \in \ldots\ldots$

Vastus. 2; $x \in \left\{\frac{\pi}{4};\ \arctan 3\right\}$; $x \in R$

5. Lihtsusta avaldis.

$$\left[\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)+\tan(\pi+\alpha)$$ ja arvuta, kui $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Lahendus.

Vastus. Lihtsustatud tulemus on $1+\tan\alpha$, ja kui $\alpha = \frac{\pi}{4}$, siis tulemus on 2.

6. Kolmnurga küljed on 4 cm, 5 cm ja 6 cm. Leia suurima nurga nurgapoolitaja pikkus.

Näpunäide. Nurgapoolitaja x jaotab esialgse kolmnurga kaheks väiksemaks kolmnurgaks, mille pindalad on S_1 ja S_2. Avalda väikeste kolmnurkade pindalad kahe külje ja nendevahelise nurga α kaudu ning koosta võrrand $S_1 + S_2 = S$. Teise seose leidmiseks kasuta esialgses kolmnurgas koosinusteoreemi. Nüüd on sul kaks võrrandit ja kaks tundmatut ning saad lahendada kahe tundmatuga võrrandisüsteemi.

Vastus. Nurgapoolitaja pikkus on $3\frac{1}{3}$ cm.

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Tõesta samasus $\sin x \cos(y-x) + \cos x \sin(y-x) = \sin y$.

2. Lahenda võrrandid.

a) $\sin^4 0{,}5x - \cos^4 0{,}5x = 0{,}5$

b) $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$

3. Kolmnurkse maatüki mõõtmed on 18 m, 16 m ja 26 m. Maatükk jaotatakse võrkaiaga kaheks osaks nii, et aed, mis algab maatüki ühest tipust, lõpeb pikimal küljel ning poolitab selle. Leia, mitu meetrit võrkaeda tuleb osta.

4. Rööpküliku ümbermõõt on 72 cm ning diagonaal jaotab ühe nurga kaheks osaks suurusega 90° ja 30°. Leia rööpküliku küljed.

5. *RE 2000.* Rombi ühe tipu juures olev nurk α rahuldab tingimust $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2$. Leia rombi pindala, kui pikem diagonaal on 24.

V. VEKTORID JA JOONE VÕRRANDID

1. *RE 1997.* Antud on tasandi neli punkti $A(-6;-1)$, $B(-4;-4)$, $C(-1;-6)$ ja $D(-3;-3)$. Tõesta, et nelinurk $ABCD$ on romb, ja arvuta selle pindala.

Lahendus. Tõestuseks tuleb näidata, et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed ja lähisküljed on ühepikkused.

$\vec{AD} = (-3-(-6);\ -3-(-1)) = (\ldots.;\ldots.)$

$\vec{BC} = (\ldots.;\ldots.)$

Kuna leitud vektorite vastavad koordinaadid on võrdelised, siis $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{AB} = (\ldots.;\ldots.)$ $\qquad$ $\vec{DC} = (\ldots.;\ldots.)$

Kuna leitud vektorite vastavad koordinaadid on võrdelised, siis $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$|\vec{AD}| = \sqrt{(-3+6)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ (ü)

$|\vec{AB}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ (ü)

Järelikult on lähisküljed $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Kuna nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed ja kõik küljed võrdsed, siis on tegemist rombiga.

Kontrolli, kas lähisküljed on risti. Selleks arvuta skalaarkorrutis.

$\vec{AD}\cdot\vec{AB} = 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \neq 0.$

Järelikult lähisküljed ei ole $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ja tegemist ei ole ruuduga.

Leia rombi pindala näiteks valemi $S = a^2 \sin\alpha$ põhjal.

Leia nurk kahe vektori vahel eelpool leitud andmete põhjal.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AD}|\cdot|\vec{AB}|} = \frac{\ldots\ldots}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{\ldots.}{\ldots.}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$S = a^2 \sin\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ü}^2)$

Vastus. Rombi pindala on 5 pindalaühikut.

2. Koosta võrrand sirgele, mis läbib punkti $B(8;\,0)$ ja on paralleelne sirgega $y = -x$. Millises punktis läbib see sirget $y = 0$?

Lahendus. Kasuta sirge võrrandit $y - y_0 = k(x - x_0)$, kus k on tõus ja $(x_0;\,y_0)$ antud punkti koordinaadid.

Antud sirge tõus on $k = -1$ ja $B(8;\,0)$.

$y - \ldots\ldots = \ldots\ldots \cdot (x - \ldots\ldots)$, millest $y = \ldots\ldots$.

Sirge lõikab .....-telge ehk sirget $y = 0$ kohal, kus $x = \ldots\ldots$. Järelikult läbib see sirge x-telge punktis ....

Vastus. $y = -x + 8$, $(8;\,0)$

3. Punktid $A(2;\,-3;\,-5)$ ja $B(-1;\,3;\,2)$ on rööpküliku tipud ning $E(4;\,-1;\,7)$ on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt. Leia, kui pikad on rööpküliku küljed.

Vastus. Küljed $AB = CD = \ldots\ldots$ ü ja $BC = AD = 3\sqrt{38}$ ü.

4. Leia sellise sirge võrrand, mis läbib sirgete $3x - y = 4$ ja $x + 2y = 6$ lõikepunkti ning on

a) paralleelne sirgega $x - 2y - 3 = 0$,

b) risti sirgega $2x - 3y + 6 = 0$.

Näpunäide. Tuleta meelde sirgete paralleelsuse tingimus ja ristumise tingimus. Lõikepunkti leidmiseks lahenda võrrandisüsteem.

Vastus. a) $y = 0{,}5x + 1$; b) $y = -1{,}5x + 5$

5. Koosta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on $O(-2;3)$ ning raadius on 12 cm.

Vastus. $(x+\ldots.)^2+(y-\ldots.)^2=\ldots.$

6. Leia ringjoone keskpunkt ja raadius, kui ringjoone võrrand on $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Näpunäide. Teisenda ringjoone võrrand täisruuduks teisendamise võttega kujule $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Vastus. $O(2;\ldots.)$ ja $r=4$ ü.

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Rööpküliku $ABCD$ kolm tippu on $A(-4;1;2)$, $B(-2;-1;1)$ ja $C(-1;1;-2)$. Leia neljas tipp ning nurk pikema diagonaali ja lühema külje vahel.

2. *RE 1999.* Antud on sirged $x+7y-6=0$ ja $5x-5y+1=0$.

a) Leia nende sirgete lõikepunkt.

b) Leia sirgetevahelise teravnurga poolitaja võrrand.

3. *RE 2000.* Täisnurkse kolmnurga kaks tippu on punktides $A(1;-2;1)$ ja $B(-4;-4;1)$. Täisnurga tipp C asetseb y-teljel. Leia punkti C koordinaadid.

4. Kolmnurk on piiratud sirgetega $y=-2$, $y=2x+4$ ja $y=-2x+4$. Seda kolmnurka katab osaliselt ring, mida piirab ringjoon võrrandiga $x^2+(y-4)^2=16$. Leia kolmnurga katmata osa pindala. Vastus esita kümnendiku täpsusega.

VI. FUNKTSIOONI UURIMINE

1. *RE 1997.* Leia funktsiooni $y=2x+\frac{2}{x-1}$

a) määramispiirkond,

b) maksimum- ja miinimumpunktid,

c) kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendus

a) Antud funktsioon ei ole määratud kohal 1. Järelikult $X=R\setminus\{1\}$.

b) Maksimum- ja miinimumpunktid.

Leia tuletis, kasutades teise liidetava jaoks näiteks liitfunktsiooni tuletist.

$$y' = \left(2x + \frac{2}{x-1}\right)' = \left(2x + 2(x-1)^{-1}\right)' = 2 - 2(x-1)^{-2} \cdot 1 = 2 - \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Ekstreemumkohtadeks saavad olla ainult tuletise nullkohad, seega

Selleks, et määrata ekstreemumi liik, lahenda võrratused . . . . . .
. . . .

Kuna tuletise märk muutub kohal 0 plussist miinuseks (. . . . . läheb üle kahanemiseks), siis sellel kohal on tegemist funktsiooni . . . . . - kohaga. Kuna tuletise märk muutub kohal 2 miinusest plussiks (kahanemine läheb üle . . . . .), siis sellel kohal on tegemist funktsiooni . . . . . .kohaga.

Ekstreemumpunktide leidmiseks arvuta funktsiooni väärtus kohtadel 0 ja 2.

$y(0) = 2 \cdot 0 + \frac{2}{-1} = \ldots\ldots$

$y(2) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

Ekstreemumpunktid on $E_{\min}(2;6)$ ja $E_{\max}(0;-2)$.

c) Kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

Lahendus

$X \uparrow$, kus $y' > 0$

$X \downarrow$, kus $y' < 0$

Kasuta eelpool olevat tuletise märgijoont ja loe sealt välja vastavad piirkonnad.

$X_1 \uparrow =]-\infty; 0[$, $X_2 \uparrow =]2; \infty[$; $X \downarrow =]0; 2[\setminus \{1\}$.

Vastus. $X = R \setminus \{1\}$; $E_{\min}(2; 6)$, $E_{\max}(0; -2)$; $X_1 \uparrow =]-\infty; 0[$, $X_2 \uparrow =]2; \infty[$; $X_1 \downarrow =]0; 1[$; $X_2 \downarrow =]1; 2[$

2. Milliste muutuja x väärtuste korral saavutab funktsioon $f(x)=2\cdot 8^x-9\cdot 4^x+12\cdot 2^x+1997$ oma suurima väärtuse lõigul $[-1;\ 1]$? Leia need funktsiooni väärtused.

Lahendus. Tähista $2^x=u$. Kuna $x\in[-1;\ 1]$, siis $u\in[0{,}5;\ 2]$, sest $2^{-1}=\ldots\ldots$ ja $2^1=\ldots$.

Teisenda funktsiooni avaldis $f(x)=2\cdot\left(2^x\right)^{\cdots}-9\cdot\ldots\ldots+12\cdot\ldots\ldots+1997$.

Tee muutuja vahetus $g(u)=2u^3-9\cdot\ldots\ldots+12\cdot\ldots\ldots+1997$.

Maksimumväärtuse leidmiseks lahenda võrrand $g'(u)=0$.

Leia tuletis.

$g'(u)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$6u^2-18u+12=0\Rightarrow u^2-3u+2=0\Rightarrow u_1=\ldots\ldots\ldots$ ja $u_2=\ldots\ldots\ldots$

$g(1)=2\cdot 1^3-9\cdot 1^2+12\cdot 1+1997=\ldots\ldots\ldots\ldots$

$g(2)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Leia funktsiooni $g(u)$ väärtused lõigu otspunktides.

$g(0{,}5)=2\cdot 0{,}5^3-9\cdot\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+1997=\ldots\ldots\ldots$

$g(2)=2001$

Funktsioon $g(u)$ omab maksimaalset väärtust kohal 1.

Mine tagasi esialgse muutuja x juurde. $2^x=1\Rightarrow x=\ldots\ldots\ldots$

$f(0)=2\cdot 8^0-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$

$E_{\max}(0;\ 2002)$.

Vastus. $x_{\max}=0,\ y_{\max}=2002$

3. Leia funktsiooni $f(x)=px^2-9x+q$ ekstreemumpunktid, kui $f(-3)=28$ ja $f(1)=-32$.

Lahendus. Leia parameetrid p ja q. Selleks lahenda võrrandisüsteem p ja q suhtes.

$$\begin{cases}(-3)^2\cdot p-9\cdot(-3)+q=28\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=-32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ldots\ldots\ldots=1\\ p+q=-23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=3\\ q=\ldots\ldots\end{cases}$$

Funktsioon $f(x)$ omandab kuju $f(x)=3x^2-9x-26$.

Ekstreemumite leidmiseks lahenda võrrand $f'(x)=0$.

Leia tuletis.

$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$6x-9=0\Rightarrow x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f''(x)=6>0\Rightarrow x=1{,}5$ on $\ldots\ldots$ koht.

Leia funktsiooni väärtus antud kohal.

$f(1{,}5)=3\cdot(1{,}5)^2-9\cdot 1{,}5-26=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Järelikult on miinimumpunkt $E_{\min}(1{,}5;\ \ldots\ldots\ldots)$.

Vastus. $E_{\min}(1{,}5;\ -32{,}75)$

4. *RE 2001.*

1. Lahenda võrrand $\cos x + \sin x = 1$, kui $x \in [-2\pi;\ 2\pi]$.

2. Leia parameetri a kõik väärtused, mille korral võrranditel $\cos x + \sin x = 1$ ja $\cos\frac{x}{2} = a$ leiduvad ühised lahendid, kui $x \in [-2\pi;\ 2\pi]$.

3. Leia funktsiooni $y = \cos\frac{x}{2}$ periood ja skitseeri selle funktsiooni graafik, kui $x \in [-2\pi;\ 2\pi]$. Skitseeri samale joonisele funktsiooni $y = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$ graafik.

Lahendus

1. $\cos x + \sin x = 1 \mid \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\ldots\ldots \cdot \cos x + \ldots\ldots \cdot \sin x = \ldots\ldots \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(\ldots + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = (-1)^n \cdot \ldots\ldots - \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$

$x_1 = -2\pi,\ x_2 = -\frac{3\pi}{2},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = 2\pi$

Kontrolli tulemust lähtevõrrandiga.

2. Leia a väärtused nii, et lahendid oleksid võrranditel samad.

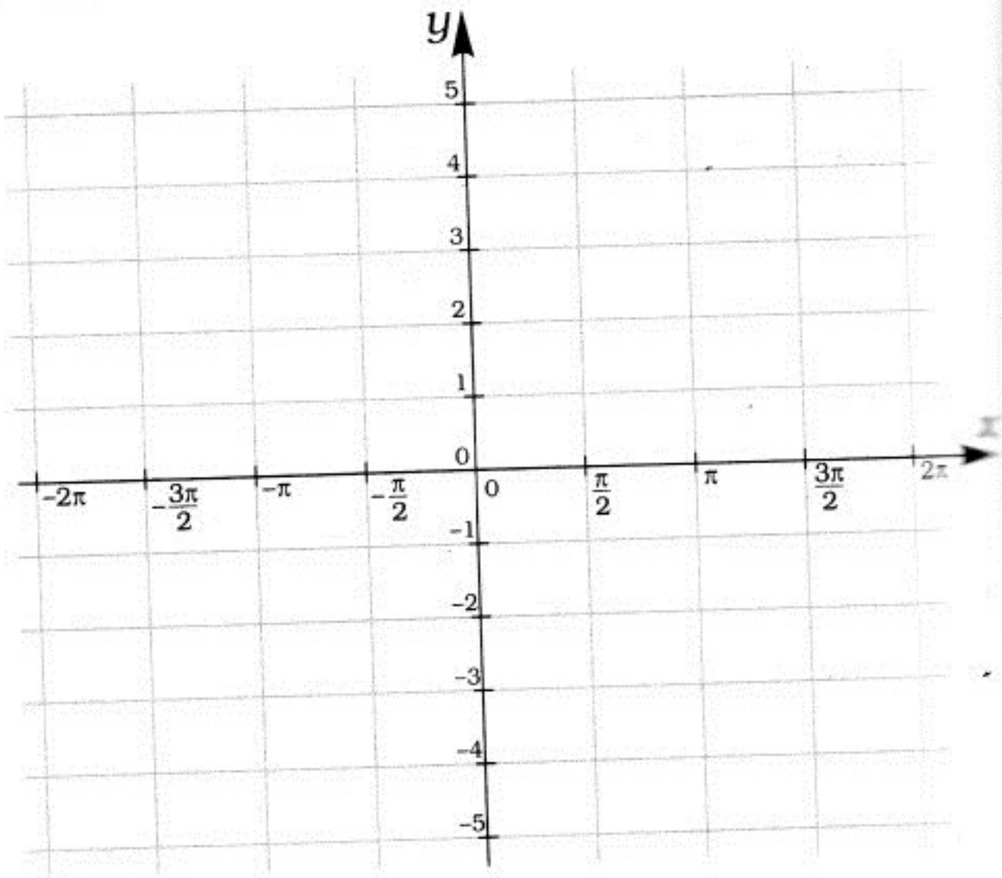
$a_1 = \cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right) = -1,\ a_2 = \cos\left(\frac{\ldots\ldots}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ a_3 = \cos\left(\frac{\ldots\ldots}{2}\right) = 1,$

$a_4 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_5 = \cos 2\pi = 1$

Seega $a \in \left\{\pm 1;\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3. Periood on $\frac{T}{|k|} = \frac{2\pi}{\ldots\ldots} = 4\pi$, kus $k = 0{,}5$.

Skitseeri graafikud.



Vastus. 1. $\left\{-2\pi, -\frac{3\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; 2\pi\right\}$

2. $\pm 1; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. 4π

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. *RE 1998.* On antud funktsioon $f(x) = x^2 - 2\ln x + 3$.

a) Leia $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$.

b) Leia antud funktsiooni kasvamispiirkond.

c) Leia antud funktsiooni ekstreemumid.

d) Lahenda võrrand $f(x) = g(x)$, kus $g(x) = x^2 + \ln^2 x$.

2. Leia funktsiooni $f(x) = 2x^3 + 1 - 3x(x+4)$ minimaalne ja maksimaalne väärtus lõigul $[-3;\ 3]$.

3. *RE 1999.* On antud funktsioon $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$.

a) Leia selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

b) Leia selle funktsiooni suurim väärtus lõigul $[0;\ 5]$.

4. On antud funktsioon $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 7x + 10\right)$.

a) Leia selle funktsiooni määramispiirkond, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond.

b) Arvuta $f(10) - f(7)$.

c) Lahenda võrrand $9^{1+f(x)} + 8 \cdot 3^{f(x)} - 1 = 0$.

5. *RE 2000.* Antud on funktsioon $y = \ln\frac{x}{e^x} - x^2$.

a) Leia funktsiooni määramispiirkond.

b) Lihtsusta funktsiooni avaldis, kasutades logaritmi omadusi.

c) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

d) Arvuta funktsiooni maksimumpunkti koordinaadid.

VII. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSED

1. Leia joone $y = x^3 + 1$ puutuja võrrand punktis, mille abtsiss on 1. Tee joonis.

Lahendus. Puutuja võrrand on $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Leia puutepunkti ordinaat.

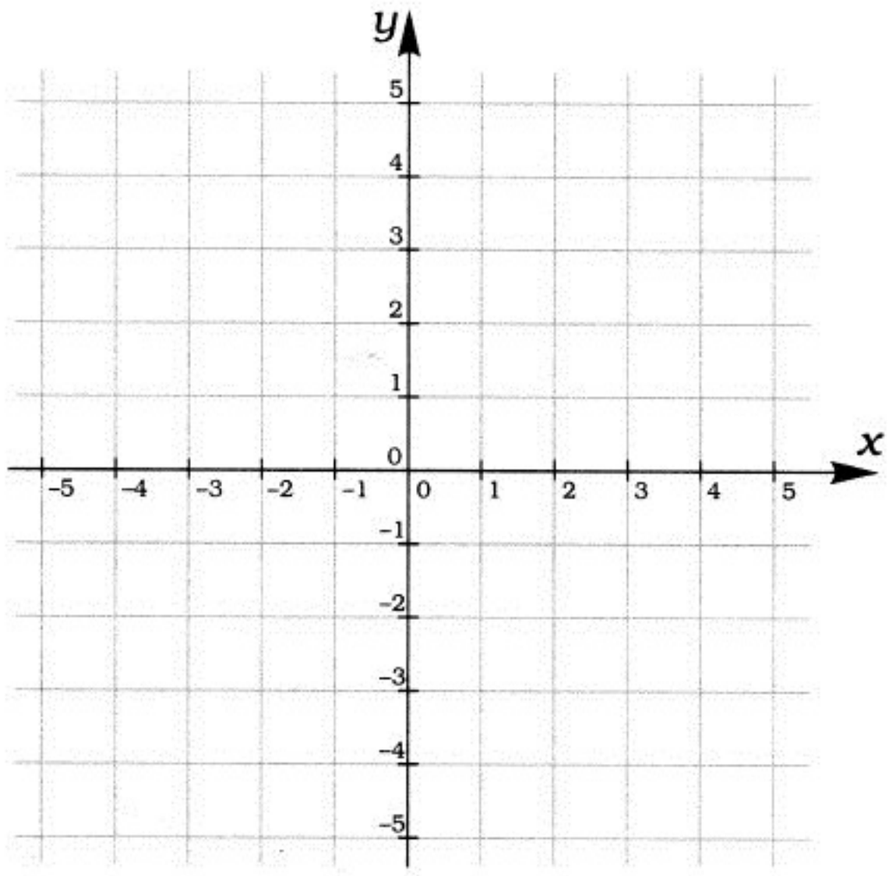
$f'(1) = 1^3 + 1 = \ldots\ldots\ldots$ Puutepunkt on $P(1; \ldots\ldots)$

Funktsiooni tuletis $f'(x) = \left(x^3 + 1\right)' = \ldots\ldots\ldots$

Puutuja tõus $k = f'(x_0) = f'(\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$

Puutuja võrrand on $y - 2 = \ldots\ldots \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$.

Joonesta funktsiooni $y = x^3 + 1$ graafik ja puutuja punktis $P(1;\ 2)$.



Vastus. $y = 3x - 1$

2. Millises punktis on paraboolil $y = x^2 + 4x$ x-teljega paralleelne puutuja?

Lahendus. Puutuja on paralleelne x -teljega punktides, kus funktsiooni tuletis on null.

$f'(x) = \left(x^2 + 4x\right)' = \ldots\ldots\ldots$

$f'(x) = 0,\ 2x + 4 = 0,\ x_0 = \ldots\ldots\ldots$

Leia ordinaat $y_0 = (-2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Järelikult on puutepunkt . . . . . .

Vastus. Puutepunkt on $P(-2;\ -4)$.

3. Jaota arv 30 kaheks arvuks nii, et nende ruutude summa oleks vähim.

Lahendus. Olgu osa arvust x, siis teine osa on $30 - x$. Moodusta funktsioon.

$f(x) = x^2 + (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2$

Lihtsusta ja korrasta funktsiooni avaldis.

$f(x) = 2x^2 - 60x + \ldots\ldots\ldots$

Maksimum leia tingimusest $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$

Leia funktsiooni tuletis ja lahenda võrrand.

$f'(x) = \left(2x^2 - 60x + 900\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$4x - 60 = 0,\ x = \ldots\ldots\ldots$

Kuna $f''(x) = 4 > 0$, siis on tegemist . . . . . .

Järelikult on arvu osad . . . . . .

Vastus. Et arvu 30 osade ruutude summa oleks vähim, peab ta jaotuma võrdseteks osadeks.

4. *RE 1999.* Plekitahvlist tuleb välja lõigata täisnurkne kolmnurk, mille pindala ruut on maksimaalne. Leia selle kolmnurga kaatetite pikkused, kui hüpotenuusi pikkus on 20 cm.

Lahendus. Moodusta pindala funktsioon.

$$S(b)=\left(\frac{ab}{2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{4}=\frac{\left(400-b^2\right)b^2}{4},\ \text{kus}\ a^2=c^2-b^2=20^2-b^2=\ldots\ldots\ldots$$

Leia funktsiooni tuletis.

$$S'(b)=\left(\frac{\left(400-b^2\right)b^2}{4}\right)'=$$

Maksimum leia tingimusest $S'(b)=0$.

$200b-b^3=0$

. . . . . .

. . . . . .

$b_1=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b_2=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b_3=-\sqrt{200}$ on võõrlahend.

Maksimumtingimust rahuldab ainult lahend $b=\sqrt{\ldots\ldots}=10\sqrt{2}$ (ü), sest

. . . . . .

Leia teine kaatet $a^2=20^2-b^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$ (ü).

Vastus. Täisnurkse kolmnurga mõlemad kaatetid on $10\sqrt{2}$ ühikut.

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Silindri täispindala on 7π ü^2. Kuidas tuleb valida silindri mõõtmed, et selle ruumala oleks maksimaalne?

2. Seinal ripub maal. Maali kõrgus on 1,4 m ja alumine serv on vaataja silmadest 1,8 meetrit kõrgemal. Kui kaugelt tuleks maali vaadata, et see oleks kõige paremini nähtav, et vaatenurk oleks maksimaalne?

3. *RE 2001.* Antud on funktsioon $f(x)=1+x^3$. Leia

a) funktsiooni tuletis;

b) funktsiooni graafiku punktid, milles puutuja tõus on 27.

4. Koosta joone $y=x^2-4x+3$ nende puutujate võrrandid, mis läbivad punkti $(2;\ -5)$. Tee joonis.

5. *RE 2005.* Antud on funktsioon $f(x)=\ln\frac{1}{x}$.

a) Leia funktsiooni määramispiirkond, lihtsusta funktsiooni avaldist.

b) Koosta funktsiooni $y=f(x)$ puutuja võrrand punktis, mille abtsiss on 1.

c) Määra ruutfunktsiooni $g(x)=ax^2+c$ avaldises kordajate a ja c väärtus tingimusel, et alajaotuses b leitud puutuja oleks ühtlasi ka funktsiooni $y=g(x)$ graafiku puutuja punktis, mille abtsiss on 1.

Joonesta samas teljestikus funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ graafikud ning nende graafikute ühine puutuja.

VIII. PINDALA JA RUUMALA LEIDMINE INTEGRAALI ABIL

1. *RE 1997.* Arvuta joontega $y = -x^2 - 2x + 3$ ja $y = -5$ piiratud kujundi pindala. Tee joonis.

Lahendus. Leia parabooli ja sirge lõikepunktid.

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Järelikult on lõikepunktid $L_1(-4; -5)$ ja $L_2(\ldots.; \ldots.)$.

Joonesta parabool. Selleks leia enne haripunkti koordinaadid ja nullkohad ning vajadu-se korral veel mõned punktid.

$x^2 + 2x - 3 = 0$

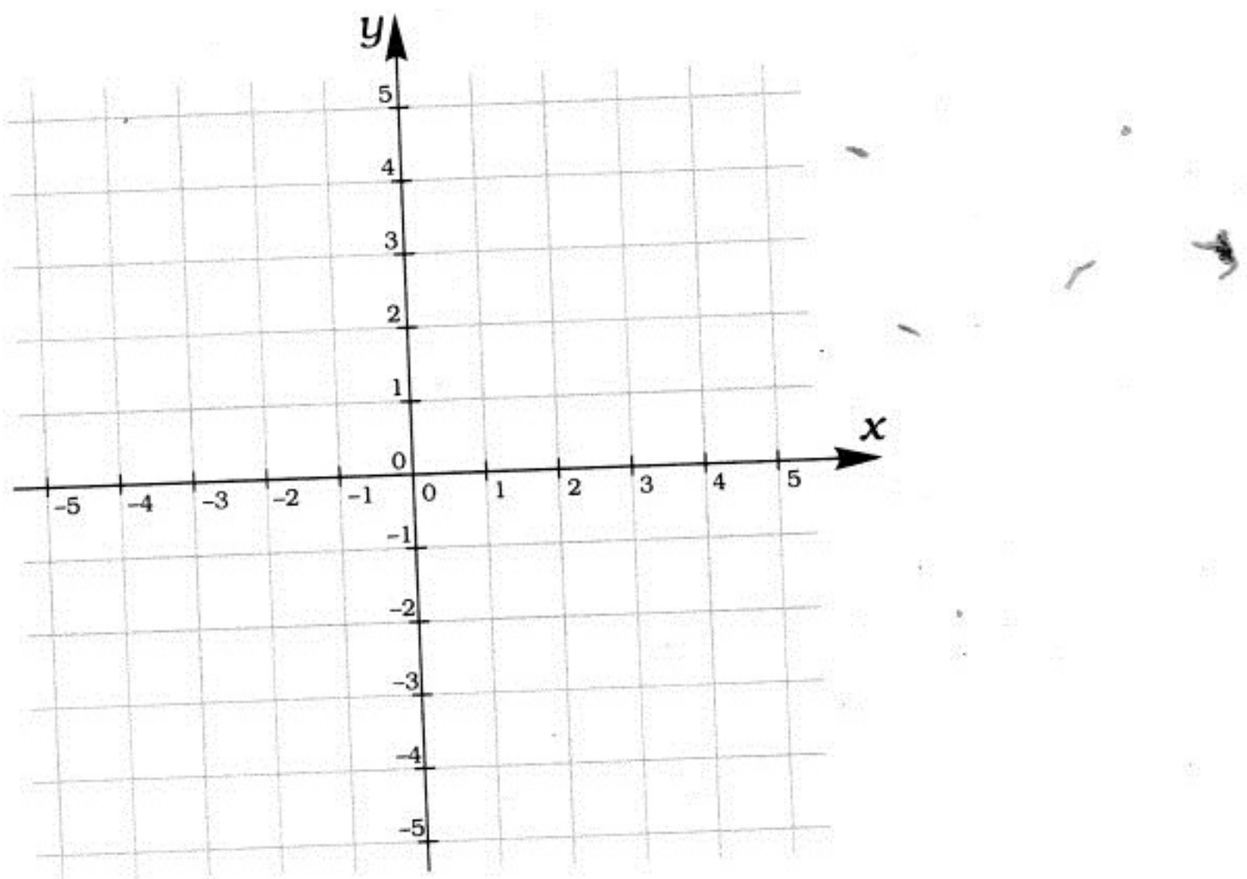
$x_1 = \ldots\ldots.,\ x_2 = \ldots\ldots$

Haripunkt $x_h = \dfrac{1-3}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots.,\ y_h = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3 = \ldots\ldots\ldots.,\ H(\ldots.; \ldots.)$

Lõikepunkt y-teljega $(0; \ldots.)$

Sirge $y = -5$ on paralleelne $\ldots.$-teljega ja asub $\ldots\ldots$ ühikut allpool x-telge.

Tee joonis ja viiruta otsitav pinnatükk.



Leia pinnatüki pindala.

$$S = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 3 + 5\right) dx = \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\Big|_{-4}^{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots (\ddot{u})^2$$

Vastus. Pindala on 36 ü².

2. *RE 1998.* On antud jooned $y = \sin x$ ja $y = \cos x$

a) Milliste x -i väärtuste korral lõigust $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on nende joonte puutujad paralleelsed?

b) Leia sirgetega $x = 0$ ja $x = \frac{\pi}{2}$ ning antud joontega piiratud kujundi pindala.

Lahendus

a) Joonte puutujad on paralleelsed punktides, kus nende funktsioonide tuletised (puutujate tõusud) on võrdsed.

Leia tuletised.

$y' = (\sin x)' = \ldots\ldots,\ y' = (\cos x)' = \ldots\ldots$

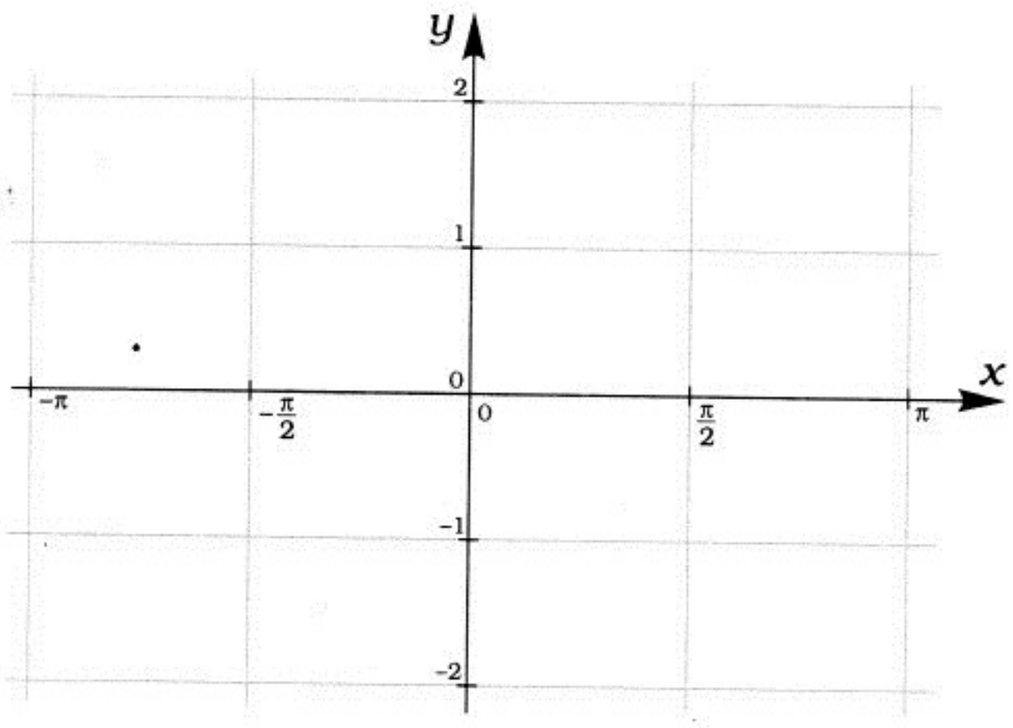
Saadud võrrand on homogeenne trigonomeetriline võrrand.

$\cos x = -\sin x \,\big|: \cos x$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Antud lõigule kuulub $x = \ldots\ldots$

Tee joonis.



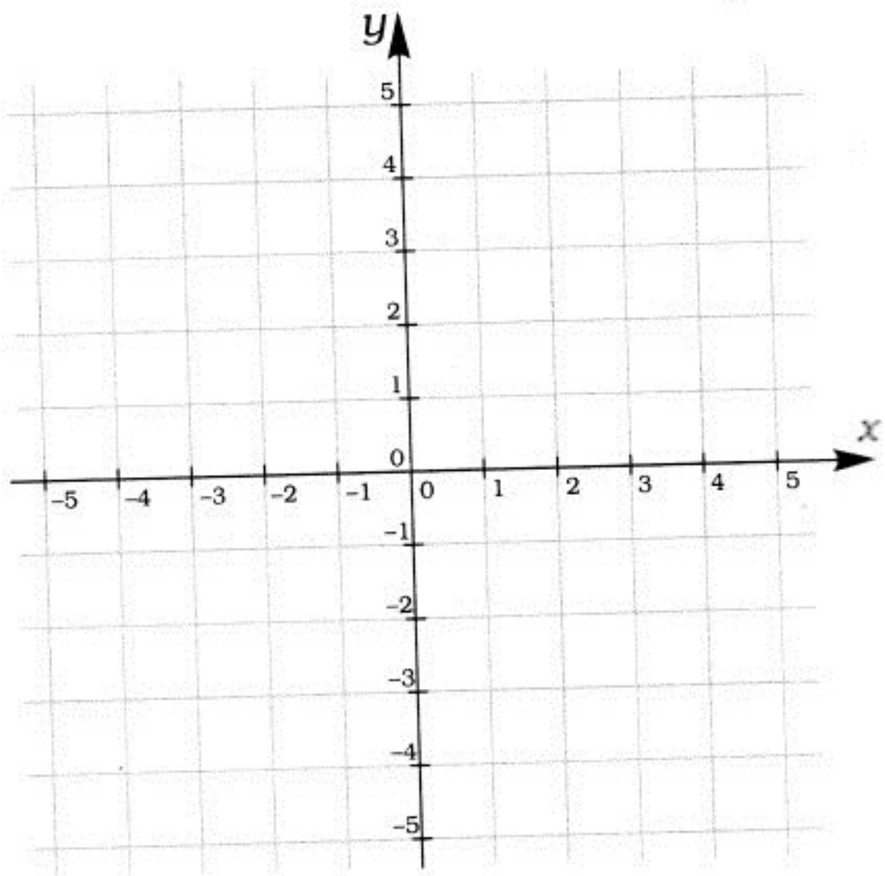
b) Kasuta sümmeetriat ja leia pindala.

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ü}^2)$$

Vastus. $x = -\frac{\pi}{4}$, $S = \left(2\sqrt{2} - 2\right)(\text{ü}^2)$

3. Leia pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x -telje ümber pöörleb joontega $2x-3y+6=0$, $x=-1$, $x=2$ ja $y=0$ piiratud kujund.



Lahendus. Tee joonis.

Arvuta tekkinud pöördkeha ruumala.

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{2}(\ldots\ldots\ldots\ldots)dx=4\pi(\ldots\ldots\ldots\ldots)\Big|_{-1}^{2}=\ldots\ldots(\text{ü}^3)$$

Vastus. $V=17\frac{2}{3}$ ü^3

4. Leia joontega $y=2(x-1)(3-x)$ ja $y=2(x-1)^2$ piiratud kujundi pindala. Tee joonis.

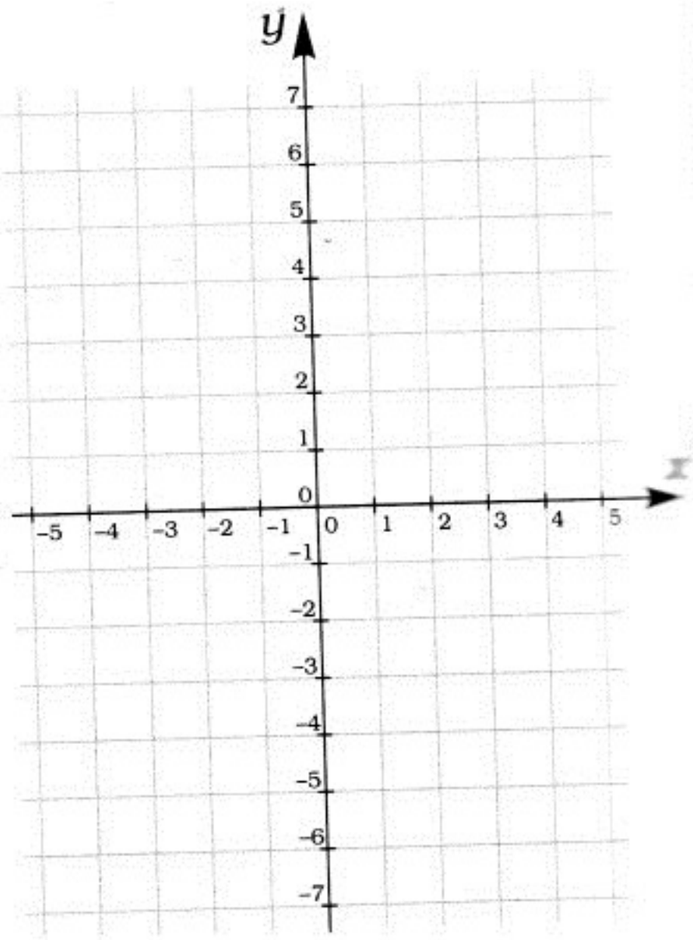
Lahendus. Teisenda antud funktsioonide avaldised.

$y=2(x-1)(3-x)\Rightarrow$ .....

$y=2(x-1)^2\Rightarrow$ .....

Tegemist on ruutfunktsioonidega. Graafikute joonestamiseks leia haripunktid ja nullkohad.

Viiruta tekkinud pinnatükk ja leia integreerimise teel pindala. Rajade leidmiseks leia joonte lõikepunktid.



$$S = \int_1^2 \left(-2x^2 + 8x - 6 - 2x^2 + 4x - 2\right)dx = \dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots = \frac{2}{3}\left(\text{ü}^2\right)$$

Vastus. $S = \frac{2}{3}$ ü²

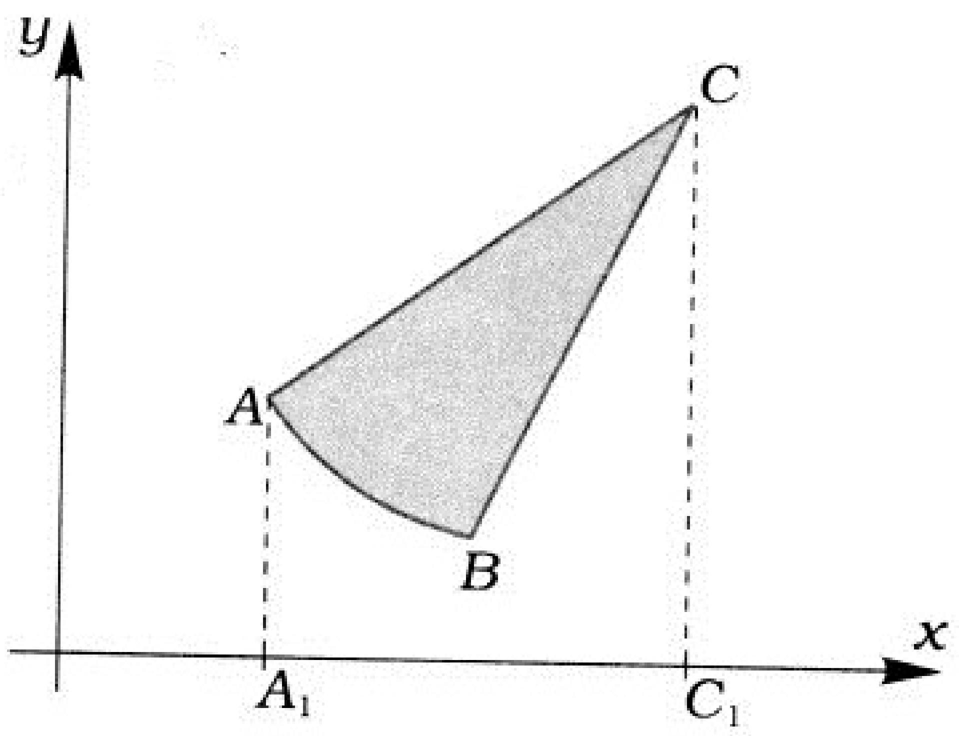
Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Leia integraalid.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x)dx$

b) $\int \frac{2x + 3x^2}{3x} dx$

2. *RE 2000*. Kujund on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 4x - 4$ ja $y = -4x - 4$. Arvuta kujundi pindala. Tee joonis.



3. *RE 2001*. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides $A(0{,}5;\ 2)$, $B(1;\ 1)$, $C(3;\ 3)$.

a) Küljeks AB on hüperbooli $xy = a$ kaar. Leia kordaja a väärtus.

b) Punktid A_1 ja C_1 on vastavalt punktide A ja C projektsioonid. Arvuta trapetsi A_1C_1CA pindala.

c) Arvuta kujundi ABC pindala.

4. On antud võrrand $2^x + 3^{3-x} - 9 = 0$.

a) Lahenda võrrand.

b) Leia ruutfunktsioon, mille nullkohad on antud võrrandi lahendid ning selle ruutfunktsiooni graafiku ja x-telje poolt piiratud pinnatüki pindala on 4,5 pindalaühikut. Tee joonis.

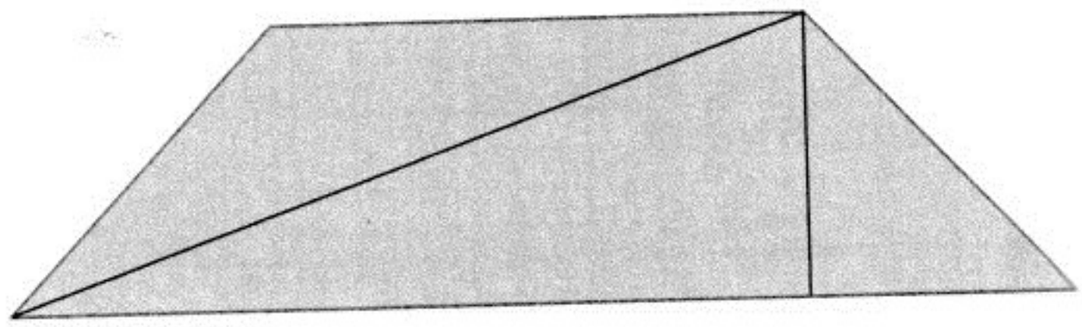
c) Joonesta sellesse pinnatükki täisnurkne kolmnurk nii, et täisnurk oleks x-teljel ja üks tipp koordinaatide alguses. Kui suure osa saab see kolmnurk pinnatükist maksimaalselt katta?

d) Kui eelmises punktis toodud kujund pöörleb ümber x-telje, siis kui suure osa maksimaalselt moodustab koonuse ruumala tekkinud pöördkeha ruumalast?

e) Leia nurk vaadeldud kolmnurga hüpotenuusi ja parabooli vahel.

IX. PLANIMEETRIA JA STEREOMEETRIA

1. Võrdhaarse trapetsi diagonaal on risti haaraga. Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi haar on 15 cm ja diagonaal 20 cm.



Lahendus

Tee joonis.

Vastavalt Pythagorase teoreemile on trapetsi pikem alus

$a = \sqrt{20^2 + 15^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Trapetsi kõrgus jagab pikema aluse osadeks f ja g. Nende leidmiseks kasuta Eukleidese teoreemi.

$\begin{cases} 20^2 = f \cdot 25 \\ 15^2 = g \cdot 25 \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f = \ldots\ldots\ldots,\ g = \ldots\ldots\ldots$

Trapetsi lühem alus on $b = 25 - 2 \cdot 9 = \ldots\ldots\ldots$

Kõrguse leidmiseks kasuta Pythagorase teoreemi.

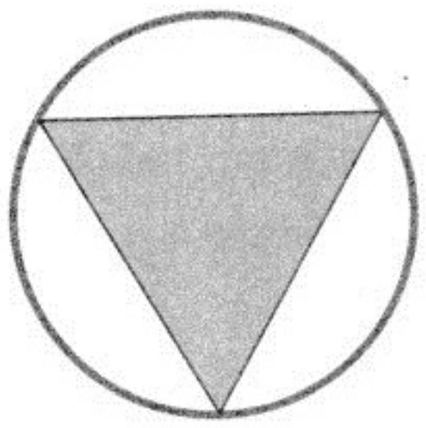
$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = \ldots\ldots\ldots$

Trapetsi pindala on

$S = \frac{a+b}{\ldots\ldots} \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Vastus. Trapetsi pindala on 192 cm²

2. Ringi sisse on kujundatud võrdkülgne kolmnurk joonisel näidatud viisil. Mitu protsenti ringi pindalast on värvitud?



Lahendus. Võrdkülgse kolmnurga pindala on $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Kolmnurga ümberringi raadius on $R = \frac{2}{3}h$, kus $h = \ldots\ldots\ldots$

Ümberringi pindala on $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Leia, mitu protsenti pindalast on värvitud.

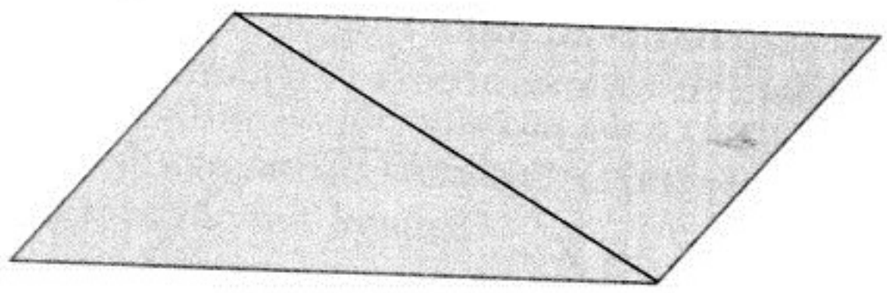
$\frac{S_\Delta}{S_O} \cdot 100\% = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Vastus. Ligikaudu 41,4% ringi pindalast on värvitud.

3. Rööpküliku ümbermõõt on 90 cm ja teravnurk 60°. Rööpküliku diagonaal jaotab nürinurga suhtes 1:3. Leia rööpküliku küljed.

Lahendus

Tee joonis.



Rööpküliku nürinurk on $180° - 60° = \ldots\ldots\ldots$ Diagonaal jaotab nürinurga suhtes 1:3.

Olgu ühe osa suurus k, siis $\cdot k + 3 \cdot k = 120°$, millest $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Järelikult jaotab rööpküliku diagonaal rööpküliku kaheks $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ nurkseks kolmnurgaks.

Rööpküliku ümbermõõt $P = 2(a+b)$. Aluste summa on $90 = 2(a+b)$, $a+b = \ldots\ldots\ldots$

Seosest $\sin 30° = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow a = \ldots\ldots\ldots$

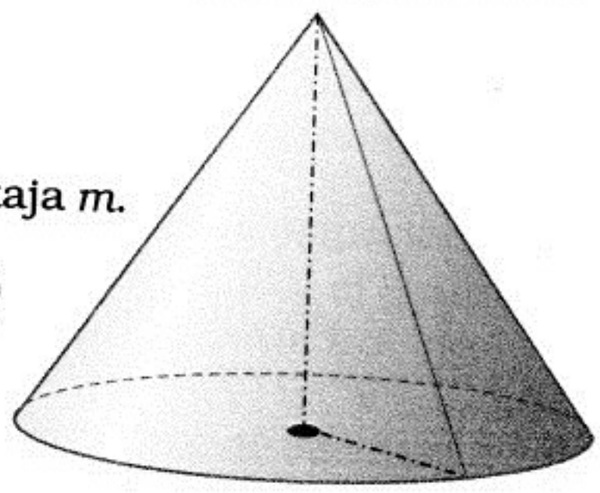
Tee vastav asendus: $0{,}5b + b = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots$

Kuna $b = 15$, siis $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Vastus. Rööpküliku küljed on 30 cm ja 15 cm.

4. *RE 1998.* Koonuse tipp asub punktis $T(0;\ 0;\ 8)$, punkt $A(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2};\ 16)$ paikneb põhja ümberringjoonel ja põhja raadius on 8 cm. Leia koonuse täispindala ja ruumala. Kui kaugele tipust tuleb teha põhjaga paralleelne lõige, mille pindala on veerand põhja pindalast?

Lahendus



Tee joonis.

Kuna punkt A asub põhja ringjoonel, siis TA on moodustaja m.

$\overrightarrow{TA} = (3\sqrt{2} - 0;\ 3\sqrt{2} - 0;\ 16 - \ldots\ldots) = (\ldots\ldots;\ \ldots\ldots;\ \ldots\ldots)$

Leia moodustaja pikkus.

$m = |\overrightarrow{TA}| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

Leia Pythagorase teoreemi põhjal kõrgus.

$h = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

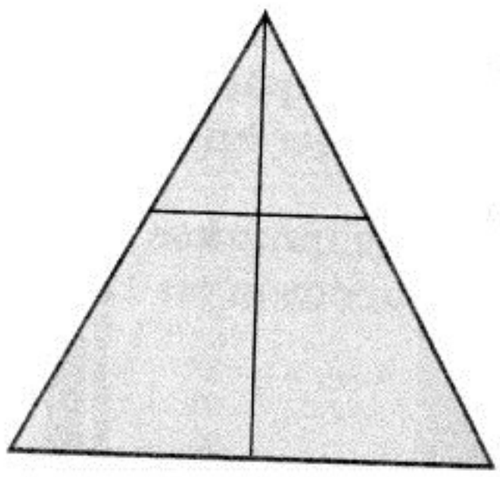
Koonuse täispindala $S_t = \pi r(r+m) = \ldots\ldots\ldots$

Koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Põhjaga paralleelse lõike pindala ja põhja pindala suhe on võrdne vastavate kõrguste suhte ruuduga: $\frac{S_l}{S_p} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2$.

Vastavalt tekstile $\frac{S_l}{S_p} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$, järelikult $\frac{h_1}{h} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$.

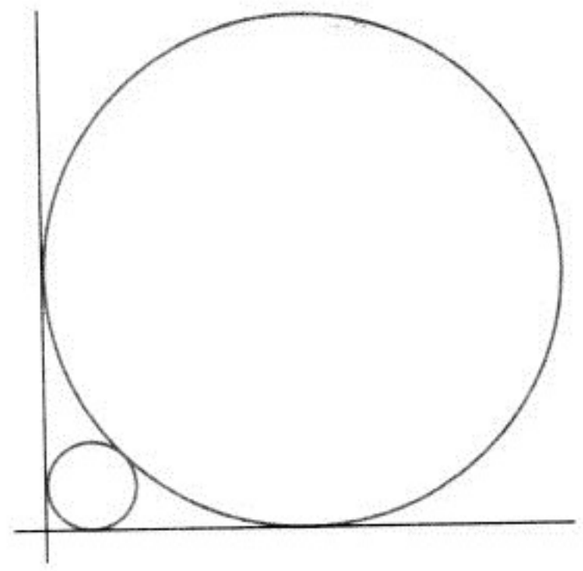
Seega lõige $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ kõrguse.



Vastus. $S_t = 144\pi$ cm^2, $V = 128\pi$ cm^3, 3 cm

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. *RE 1997.* Täisnurga sees paiknevad kaks ringjoont puutuvad teineteist ja täisnurga haarasid joonisel näidatud viisil. Arvuta suurema ringjoone raadius, kui väiksema raadius on r.



2. Arvuta võrdhaarse trapetsi pindala, kui pikem alus on 44 cm ja haar 17 cm ning diagonaal 39 cm.

3. Rõnga pindala on S. Väiksema ringi raadius moodustab kümnendiku suurema ringi ümbermõõdust. Leia suurema ringi raadius.

4. *RE 1998.* Võrdhaarses trapetsis on suurem alus kaks korda pikem väiksemast ja diagonaal poolitab teravnurga. Avalda trapetsi küljed, kui trapetsi pindala on S. Arvuta trapetsi küljed, kui $S = 3\sqrt{3}$.

5. *RE 1998.* Sektorisse, mille raadius on R ja kesknurk α, on kujundatud ring. Avalda ringi raadius ning ringi ja sektori pindalade suhe. Arvuta see suhe, kui $\alpha = 60°$.

6. Leia täisnurkse kolmnurga pindala, kui siseringjoon jaotab ühe kaateti oma puutepunktiga lõikudeks 6 cm ja 10 cm alates täisnurga tipust.

7. Täisnurkse kolmnurga täisnurkset tippu läbiv sirge moodustab lühema kaatetiga $30°$ nurga ja lõikab hüpotenuusi punktis, mis jaotab selle suhtes $1:2$. Leia hüpotenuusi pikkus, kui lühema kaateti pikkus on $\sqrt{3}$.

8. Kera sisse on kujundatud koonus. Avalda koonuse ruumala, kui koonuse telglõike tipunurk on 2α ja kera raadius R. Arvuta koonuse ruumala, kui $R = 1{,}5$ dm ja $\alpha = 32°15'$.

9. Silindri telglõige ja põhi on pindvõrdsed. Avalda silindri täispindala, kui silindri kõrgus on h.

10. Kerasse raadiusega 6 cm on kujundatud koonus telglõike tipunurgaga $60°$. Leia kera ja koonuse ruumalade vahe.

11. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 4 cm ja haar 8 cm. Kõik külgtahud moodustavad püramiidi põhjaga kahetahulised nurgad $60°$. Leia püramiidi külgpindala.

12. Korrapärase kolmnurkse prisma põhiserv on 3 cm ja külgserv on 8 cm. Arvuta prisma ümber kujundatud kera raadius (prisma tipud asuvad kera pinnal).

13. Kolmnurkse korrapärase püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga nurga $60°$ ja apoteem on 12 cm. Leia püramiidi täispindala ja ruumala.

X. TÕENÄOSUSTEOORIA JA STATISTIKA

1. *RE 1997.* Kunstnik kinkis koolile 5 maali. Need riputati saali seinale ritta juhuslikus järjekorras. Mitu võimalust on pilte erinevas järjekorras üles riputada? Kui suur on tõenäosus, et maal raamatut lugeva tüdrukuga satub vasakult esimeseks? Kas tõenäosus muutub, kui tüdrukuga pilt peaks asuma täpselt keskel?

Lahendus. Kõigi võimaluste arv on $5! = \ldots\ldots\ldots$

Soodsate võimaluste arvuks on ülejäänud nelja maali erinevate järjestuste arv

$4! = \ldots\ldots\ldots$

Sõltumata sellest, kus tüdrukuga maal asub, on tõenäosus $p = \frac{m}{n} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

Vastus. Tõenäosus ei sõltu sellest, kus tüdrukuga maal asub, ja tõenäosus on 0,2.

2. Urnis on 100 loteriipiletit järjekorranumbritega 1–100. Iga pileti hind on 5 eurot. Võit suurusega 7 eurot makstakse välja piletite eest, mille järjekorranumber jagub kas 2, 3 või 5-ga. Kui suur on keskmine võidusumma ühe pileti ostmise korral? Kas sellisel loteriil tasub mängida?

Lahendus

I variant

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub kahega, on

$P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{50}{100} = \ldots\ldots\ldots$

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub kolmega, on $P(A_3) = \frac{33}{\ldots\ldots}$.

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub viiega, on

$P(A_5) = \frac{20}{100} = \ldots\ldots\ldots$

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub kahe ja kolmega, on $P(A_2 \cap A_3) = \frac{16}{100} = \ldots\ldots\ldots$, sest selliseid arve on esime saja täisarvu seas 16 (need on $2 \cdot 3 = 6$ -ga jaguvad arvud).

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub kolme ja viiega, on

$P(A_3 \cap A_5) = \frac{\ldots\ldots}{100} = \ldots\ldots\ldots$, sest selliseid arve, mis jaguvad $3 \cdot 5 = \ldots\ldots\ldots$, on täpselt 6.

Tõenäosus, et ostetud piletite järjekorranumber jagub kahe, kolme ja viiega, on

$P(A_2 \cap A_3 \cap A_5) = \frac{\ldots\ldots}{100} = \ldots\ldots\ldots$, sest selliseid arve, mis jaguvad $2 \cdot 3 \cdot 5 = \ldots\ldots\ldots$, on täpselt $\ldots\ldots\ldots$.

Kuna tegemist ei ole üksteist välistavate sündmustega, siis sündmuste A_2, A_3, A_5 summa tõenäosus

$P(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \frac{1}{100}(50 + 33 + \ldots - 16 - \ldots - \ldots + 3) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

Järelikult on tõenäosus võita loteriil $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

Kuna võidu tõenäosus $\ldots\ldots\ldots$ on suurem kaotuse tõenäosusest

$1 - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$, siis järelikult on tõenäosus võita suurem.

Leia keskmine võidusumma ühe pileti ostmise korral.

Võitva pileti ostmisel on tegelik võit 2 eurot ja tühja pileti korral on kaotus 5 eurot.

$$E = x_1 \cdot p_1 + \ldots\ldots + x_n \cdot p_n = 2 \cdot \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + (-5) \cdot \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots \text{ eurot.}$$

II variant

Loe proovimise teel arvud, mis jaguvad 2, 3 või 5-ga. Neid on kokku 74. Või loe arvud, mis ei jagu nimetatud arvudega. Neid on kokku 26. Järelikult on võiduka pileti saamise tõenäosus $P(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = \frac{74}{100} = \ldots\ldots\ldots$

Edasi toimi analoogselt eelmise lahendusvariandiga.

Vastus. Sellel loteriil on ühe pileti ostmise korral keskmine (oodatav) võidusumma 0,18 eurot, seetõttu tasub sellisel loteriil mängida.

3. Märklehe pindala on 90 cm^2 ja see on jagatud neljaks piirkonnaks vastavalt 5 cm^2, 15 cm^2, 25 cm^2 ja 45 cm^2. Laskja sooritab ühe lasu, kusjuures

a) tõenäosus, et ta tabab märklehte, on 0,1;

b) märklehe iga piirkonna tabamise tõenäosus on võrdeline selle piirkonna pindalaga;

c) esimese piirkonna tabamine annab 25 punkti, järgmiste piirkondade tabamine vastavalt 19, 11, ja 7 punkti;

d) märklehest mööda lastes laskja punkte ei saa.

Leia laskja saadavate punktide arvu (kui juhusliku suuruse) jaotus, keskväärtus, dispersioon ja standardhälve.

Lahendus. Koosta tabel, kuhu kanna laskja saadud punktid ja vastava punktisumma saavutamise tõenäosus.

Punktide arv x_i	0	7	11	19	25
Tõenäosus p_i	$1 - 0{,}9 = \ldots$	$\frac{45}{90} \cdot 0{,}9 = \ldots$	$\frac{\ldots\ldots}{90} \cdot 0{,}9 = \ldots\ldots\ldots$	$\frac{\ldots\ldots}{90} \cdot 0{,}9 = \ldots\ldots\ldots$	$\frac{\ldots\ldots}{90} \cdot 0{,}9 = \ldots\ldots\ldots$

Kontroll. $0{,}1 + 0{,}45 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = 1$

Leia laskja saadavate punktide arvu keskväärtus.

$$EX = x_1 \cdot p_1 + \ldots\ldots + x_n \cdot p_n = 0 \cdot 0{,}1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Leia laskja saadavate punktide arvu dispersioon.

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0^2 + 0{,}45 \cdot 7^2 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - 10^2 = \ldots\ldots\ldots$$

Leia standardhälve.

$$\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} \approx \ldots\ldots\ldots$$

Vastus. Laskja saadavate punktide arvu jaotus on esitatud tabelis. Selle punktide arvu kui juhusliku suuruse keskväärtus on 10, dispersioon 37,7 ja standardhälve 6,14.

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Kooli reaalainete õhtul kohtuvad finaalis kaks võistkonda. Esimeses on 2 head matemaatika-, 3 head füüsika- ja 2 head keemiaoskajat, teises võistkonnas vastavalt 4, 3 ja 3 head nimetatud ainete oskajat. Võistkondade liikmeid kutsutakse nuputama juhuslikult. Leia tõenäosus, et

a) teisest võistkonnast kutsutakse hea füüsikaoskaja;

b) mõlemast võistkonnast kutsutakse hea matemaatikaoskaja;

c) kummastki võistkonnast ühte õpilast kutsudes on üks hea matemaatika- ja teine hea keemiaoskaja.

2. Karbis on segamini 22 tahvlit lisanditeta, 18 rosinate ja 24 mandlitega Kalevi piimašokolaadi. Leia tõenäosus, et juhuslikult võttes

a) saab esimene võtja rosinatega šokolaadi;

b) saavad kolm esimest lisanditeta šokolaadi;

c) saab teine võtja mandlitega šokolaadi.

3. Pargi uuendamiseks osteti puukoolist 7 istikut. Iga istiku kasvama minemise tõenäosus on 0,8. Leia tõenäosus, et

a) täpselt 4 istikut läheb kasvama;

b) kasvama läheb vähemalt 5.

Milline on kõige tõenäosem kasvamaminevate istikute arv?

4. Veeretatakse korraga kaht täringut. Kui suur on tõenäosus, et ühel täringul saadud silmade arv jagub teisel täringul saadud silmade arvuga (jagatise väärtuseks võib olla ka arv 1)?

5. *RE 2004.* Uue bussipeatuse asukoha määramiseks loendati ajutises peatuses juhuslikult valitud tööpäeval iga poole tunni järel bussi sisenejad. Kellaaegade järjekorras saadi sisenejate statistiline rida:

9, 6, 10, 15, 10, 13, 11, 12, 9, 11, 9, 9, 8, 7, 9, 10.

a) Korrasta statistiline rida.

b) Leia mediaan.

c) Leia ajutises peatuses sellel tööpäeval bussi sisenejate keskmine arv.

6. *RE 2004.* Lilleseemne idanemise tõenäosus on 0,75.

Leia tõenäosus, et

a) lilleseeme ei idane,

b) kaheteistkümnest lilleseemnest idaneb kümme.

XI. MITMESUGUST

Lahenda ülesanded vihikusse.

1. Lihtsusta avaldis $\left(\frac{y-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+2\sqrt{x}\right)^{-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

2. Lahenda võrrand $\log_{\frac{6-x}{2x}} 2+1=0$.

3. Lahenda võrrand $2^{x+1} - 5\sqrt{2^x} + 2 = 0$.

4. Rong pidi kindla ajavahemiku jooksul läbima 840 kilomeetrit. Poolel teel seisis rong 0,5 tundi semafori juures. Selleks, et jõuda kohale õigel ajal, tuli kiirust suurendada 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Kui kaua oli rong teel?

5. Tööpäeva lühendati kaheksalt tunnilt seitsmele. Mitu protsenti tuleb tõsta tööviljakust, et samade tööhinnete juures tõuseks palk 5%?

6. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 12 cm ja külgserva ning põhjatasandi vaheline nurk on 60°. Püramiidi ümber on kujundatud kera nii, et püramiidi kõik tipud asuvad kera pinnal. Arvuta

a) kera pindala,
b) püramiidi täispindala,
c) püramiidi ruumala.

7. Linnade A ja B vahemaa on 28 km. Kummastki linnast alustas samal ajal sõitu jalgrattur. Jalgratturid liikusid teineteisele vastu. Ühe tunni pärast nad kohtusid ning jätkasid sõitu peatumata ja kiirust muutmata. Esimene jalgrattur jõudis linna B 35 minutit varem kui teine linna A. Mõlemad jalgratturid sõitsid ühtlase kiirusega. Leia kummagi jalgratturi kiirus ja nende kohtumispaiga kaugus linnast A.

8. Antikvariaat ostis 2 raamatut 224 euro eest ja sai need edasi müües 40% kasumit. Leia mõlema raamatu müügihind, teades, et esimese raamatu müügist saadi 15% ja teise raamatu müügist 50% kasumit.

9. *RE 1998.* Ühistu maast on 80% põldude all ja 51 ha on metsa. Mittepõllumaast on 15% heinamaa. Mitu hektarit on ühistul heinamaad? Mitu protsenti moodustab see ühistu kogu maast?

10. Kauba hind tõusis 20%. Mitu protsenti peaks uut hinda veel tõstma, et kogu hinnatõus oleks 44% ? Mitme protsendi võrra oli teine kallinemine suurem esimesest?

11. Pärast seda, kui raamatust oli loetud 24 lehekülge, jäi veel lugeda 84% raamatust. Teisel päeval loeti seni lugemata raamatu osast veel 50%. Mitu lehekülge oli raamatus ja mitme protsendi võrra loeti teisel päeval rohkem kui esimesel?

12. Ema brutopalk on 842 eurot. Kui palju raha kantakse palgapäeval ema pangaarvele, kui tulumaksuvaba miinimum on 144 eurot ja tulumaks on 21% ning töötaja töötuskindlustusmaksu määraks on 2,0% brutotasust?

VASTUSED

I. ALGEBRA

1. 2
2. 4
3. a) $x - y$; b) -2; c) $\frac{x^{\frac{1}{4}} - 3y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - 2y^{\frac{1}{4}}}$; d) $\sqrt{y} - \sqrt{x}$
4. $-\frac{ab}{(a+b)^2}$; $\frac{1}{4}$

II. VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

1. $]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$
2. $]-\infty; -2[\cup]0; \infty[$
3. $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1\frac{2}{7}$
4. $\begin{cases} x_1 = (a+1)^2 \\ y_1 = a+1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = a^2 \\ y_2 = -a \end{cases}$
5. a) $x = 1$; b) $x = 4{,}5$
6. $x_1 = 6$, $x_2 = 14$
7. -9
8. $a = 0$ või $a = 1$

III. JADAD

1. 7; 14; 28; 56
2. 20 liiget
3. a) $6500 \cdot 1{,}02^4 \approx 7000$ m³; b) 35 aasta pärast
4. 6230,90 eurot
5. $1 \leqslant n \leqslant 12$ ja n on naturaalarv

IV. TRIGONOMEETRIA

2. a) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z$; b) $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$
3. 11 m
4. 12 cm ja 24 cm
5. $96\sqrt{3}$ ü²

V. VEKTORID JA JOONE VÕRRANDID

1. $D(-3;\ 3;\ -1)$, $\alpha = 48°11'$
2. a) $\left(\frac{23}{40};\ \frac{31}{40}\right)$; b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{12}$
3. $(0;-5;0)$ või $(0;-1;0)$
4. Ligikaudu 10,6 ü²

VI. FUNKTSIOONI UURIMINE

1. a) $e+2$; b) $x > 1$; c) minimaalne väärtus on 4; d) $x_1 = \frac{1}{e^3}$; $x_2 = e$
2. $y_{max} = 8$; $x_{max} = -1$, $y_{min} = -44$, $x_{min} = -3$
3. a) $X_1\uparrow = \left]-\infty;\ \frac{1}{3}\right[$; $X_2\uparrow = \left]3;\ \infty\right[$; $X\downarrow = \left]\frac{1}{3};\ 3\right[$; b) $y = 4$
4. a) $X = \left]-\infty;\ 2\right[\cup \left]5;\ \infty\right[$; $X^+ = \left]-\infty;\ 3{,}5 - \sqrt{3{,}25}\right[\cup \left]3{,}5 + \sqrt{3{,}25};\ \infty\right[$; $X^- = \left]3{,}5 - \sqrt{3{,}25};\ 3{,}5 + \sqrt{3{,}25}\right[$; b) –2; c) 1 ja 6
5. a) $\left]0;\ \infty\right[$; b) $y = \ln x - x - x^2$; c) $X\uparrow = \left]0;\ 0{,}5\right[$; $X\downarrow = \left]0{,}5;\ \infty\right[$; d) $E_{max}(0{,}5;\ -\ln 2 - 0{,}75)$

VII. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSED

1. $h \approx 2{,}16$, $r \approx 1{,}08$
2. 2,4 m
3. a) $3x^2$; b) $(3;\ 28)$, $(-3;\ -26)$
4. $4x + y - 3 = 0$ ja $4x - y - 13 = 0$
5. a) $X = \left]0;\ \infty\right[$; $f(x) = -\ln x$; b) $y = -x + 1$; c) $a = -0{,}5$ ja $c = 0{,}5$

VIII. PINDALA JA RUUMALA LEIDMINE INTEGRAALI ABIL

1. a) 5; b) $\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{2} + C$
2. $5\frac{1}{3}$ ü²
3. a) $a = 1$; b) 6,25; c) $2{,}25 - \ln 2$
4. a) $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$; b) $y = x^2 - 3x$; c) $S = 2$ ü²; d) $V = 8{,}1\pi$ üh³, 32,9%; e) $\alpha = 90°$

IX. PLANIMEETRIA JA STEREOMEETRIA

1. $R = r\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$
2. 540 cm²

3. $R = 5\sqrt{\dfrac{S}{25\pi - \pi^3}}$

4. Alused 2 üh ja 4 üh ning haarad 2 üh

5. $\dfrac{2\pi \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\alpha\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{3}$

6. $S = 240\ \text{cm}^2$

7. $\sqrt{7}$ üh

8. $\dfrac{\pi R^3 \sin^2 4\alpha}{6}$

9. $4h^2\left(\dfrac{2}{\pi}+1\right)$

10. $V_{\text{koonus}} = 81\pi$ ja $V_{\text{kera}} = 288\pi$

11. $8\sqrt{15}\ \text{cm}^2$

12. $\sqrt{19}$ üh

13. $S_t = 324\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ ja $V = 648\ \text{cm}^3$

X. TÕENÄOSUSTEOORIA JA STATISTIKA

1. a) 0,3; b) 0,2; c) 0,23
2. a) 0,281; b) 0,037; c) 0,375
3. a) 0,114; b) 0,852. Kõige tõenäosem istikute arv on 5 ja 6.
4. 0,611
5. b) 9,5; c) ligikaudu 10
6. a) 0,25; b) 0,232

XI. MITMESUGUST

1. $\dfrac{2\sqrt{y}}{x-y}$
2. 3
3. 2 ja –2
4. 21 tundi
5. 20%
6. a) $256\pi\ \text{cm}^2$; b) $96\left(1+\sqrt{7}\right)\text{cm}^2$; c) $384\ \text{cm}^3$
7. 16 km/h, 12 km/h ja 16 km
8. 240 eurot ja 73,60 eurot
9. 9 ha ja 3%
10. 20% ja 20%
11. 150 lk ja 162%
12. 678,58 eurot

HARJUTUSÜLESANDED 12. KLASSI LÕPETAMISEKS

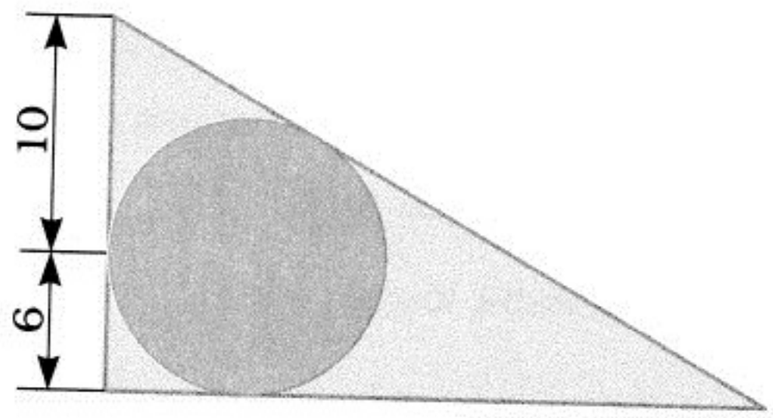
I OSA

1. Lahenda võrrand tundmatu x suhtes. Milliste parameetri a väärtuste korral on üks lahend võrdne teise ruuduga?

$$(a-2)\cdot x^2+(-2a+3)\cdot x+2=0$$

2. Leia arv, mis on avaldise $A=3+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ väärtusest 30% väiksem.

3. Mariliis kavatseb oma aias haljastada täisnurkse kolmnurga kujulise maalapi. Ta tahab sellele paigutada ringikujulise lilleklumbi, mis puudutaks kõiki külgi ja jaotaks oma puutepunktiga ühe külje lõikudeks 6 m ja 10 m täisnurga tipust alates. Ülejäänud osa tahab ta panna muru alla. Kui palju muruseemet kulub, kui seemnekulu on 3,5 kg/100 m^2?



4. Tõenäosus, et õpilane hilineb tundi, on 0,1. Kui tõenäone on, et 4 õpilasest jõuab 3 õigel ajal tundi? Kui suur on tõenäoseim hilinejate arv, kui klassis on 26 õpilast?

5. Laskur Lauri treeningu tulemused on esitatud tabelis. Leia silmade arvu keskväärtus, mood ja mediaan. Koosta suhtelist sagedust väljendav sektordiagramm.

Silmade arv	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sagedus	1	1	0	2	5	9	7	9	8	8

6. Anne ja Anu alustasid jalgrattaga sõitu samast kohast ja samas suunas. Anne läbis igas tunnis 12 km, Anu aga esimeses tunnis 10 km ja igas järgnevas tunnis 1 km võrra rohkem kui eelmises. Mitme tunni pärast jõudis Anu Annele järele?

astused

1. $2{,}25;\ 2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. 4,9
3. ligikaudu 4,5 kg
4. ligikaudu 29%; 2
5. 5 tundi

II OSA

7. Ruudu $ABCD$ külgedel AB ja BC on võetud punktid K ja M nii, et $3AK = 2BM = AB$. Leia

a) sirgete DK ja AM vaheline nurk;

b) nelinurga $LMCD$ pindala, kui L on sirgete DK ja AM lõikepunkt ning ruudu külje pikkus on 1.

8. Antud on funktsioon $f(x) = \cos x - 1$.

a) Lihtsusta avaldis $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

b) Olgu antud täisnurkne kolmnurk ABC, mille hüpotenuus $AB = 2$ ja $\angle A = \alpha$. Leia kõik α väärtused, mis rahuldavad tingimust $AC = f(\alpha) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Leia funktsiooni $f(x)$ periood ja muutumispiirkond ning skitseeri funktsiooni graafik, kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

9. Antud on funktsioon $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

a) Arvuta $f(\log_2 3)$.

b) Arvuta funktsiooni graafiku ja koordinaattelgede lõikepunktide koordinaadid.

c) Leia puutuja p võrrand, kui puutepunkti abstsiss on $x_0 = 1$.

d) Leia funktsiooni $f(x)$ vähim väärtus.

e) Skitseeri funktsiooni $f(x)$ graafik lõigul $[-4; 3]$.

10. Risttahuka pindala on 200 cm^2 ja selle põhiservad suhtuvad nagu 3 : 1. Arvuta niisuguse risttahuka kõrgus, kui on teada, et selle ruumala on maksimaalne.

Vastused

7. $81°52'$; $\frac{17}{28}$

8. -2; $45°$; periood on 2π; $Y = [-2; 0]$

9. -3; $A(2; 0)$ ja $B(0; -3)$; $y = -4$; -4

10. 5 cm

KASUTATUD KIRJANDUS

1. *T. Tõnso, A. Veelmaa.* Matemaatika XII klassile. Tallinn, Mathema, 2000.
2. *L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker.* Matemaatika XII klassile. Tallinn, Koolibri, 1997.
3. *L. Lepmann, T. Lepmann, H. M. Varul.* Ülesanded keskkooli matemaatika lõpueksamiks. Tallinn, Koolibri, 1998.
4. *V. Luigelaht, E. Reiman.* Koolimatemaatika põhikursus, I ja II osa. Tallinn, Valgus, 1993.
5. *E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt.* Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile. Tallinn, Valgus, 1990.
6. *A. Lind, K. Nagel.* Ilo koduõpetaja. Matemaatika. AS Kirjastus ILO, 2000
7. *A. Lind, K. Nagel.* Ülesanded gümnaasiumile. Matemaatika. AS Kirjastus ILO, 2000.
8. *E. Abel, M. Abel, Ü. Kaasik.* Koolimatemaatika entsüklopeedia. Tartu, Ilmamaa, 1998.
9. *E. Abel, U. Lõhmus.* Planimeetria ainetestid. Tartu Riiklik Ülikool, 1984.

SISUKORD

1. KORDAMINE 3
HARJUTUSÜLESANDED 10
2. VEKTOR TASANDIL. KORDAMINE 11
HARJUTUSÜLESANDED 13
3. PUNKTI KOORDINAADID RUUMIS 14
4. VEKTORI KOORDINAADID RUUMIS 16
HARJUTUSÜLESANDED 20
5. SIRGE VÕRRANDID TASANDIL. KORDAMINE 21
6. SIRGE VÕRRANDID RUUMIS 23
7. TASANDI VÕRRANDID 24
8. TASANDI VÕRRANDI ERINEVAD KUJUD 25
9. KAHE TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID 27
10. KAHE SIRGE VASTASTIKUSED ASENDID 28
11. SIRGE JA TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID 29
12. KAHETAHULINE NURK 31
HARJUTUSÜLESANDED 33
13. PLANIMEETRIA KORDAMINE 34
14. HULKTAHUKAD 42
15. PRISMA 44
HARJUTUSÜLESANDED 47
16. PÜRAMIID 48
HARJUTUSÜLESANDED 50
17. PÜRAMIIDI PÕHJAGA PARALLEELSE LÕIKE OMADUSI 52
18. PÖÖRDKEHAD. SILINDER 53
19. KOONUS 55
20. KERA 56
21. KERA OSAD 57
22. STEREOMEETRIA HARJUTUSÜLESANDED 60
23. FUNKTSIOONI TULETIS. KORDAMINE 63
24. ALGFUNKTSIOON. MÄÄRAMATA INTEGRAAL 64
25. INTEGRAALI OMADUSED JA PÕHIVALEMID 65
26. INTEGREERIMINE MUUTUJAVAHETUSEGA 66
27. KÕVERTRAPETSI PINDALA. MÄÄRATUD INTEGRAAL 67
28. MÄÄRATUD INTEGRAALI OMADUSED 70
29. KÕVERTRAPETSI PINDALA ARVUTAMINE 71
30. PÖÖRDKEHA RUUMALA ARVUTAMINE 75
HARJUTUSÜLESANDED 77
31. KORDAMINE 79
I. ALGEBRA. 79
II. VÕRRANDID JA VÕRRATUSED 82
III. JADAD 86
IV. TRIGONOMEETRIA 88
V. VEKTORID JA JOONE VÕRRANDID 91
VI. FUNKTSIOONI UURIMINE 93
VII. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSED 97
VIII. PINDALA JA RUUMALA LEIDMINE INTEGRAALI ABIL 100
IX. PLANIMEETRIA JA STEREOMEETRIA 104
X. TÕENÄOSUSTEOORIA JA STATISTIKA 107
XI. MITMESUGUST 109
VASTUSED 110
HARJUTUSÜLESANDED 12. KLASSI LÕPETAMISEKS. 113
KASUTATUD KIRJANDUS 115

ISBN 978-9985-2-2158-7